Izedin Kërniq Marko Jokiq Mirjana Boshkoviq

MATEMATIKA

Manuali për arsimtarët

Enti i Teksteve dhe i Mjeteve Mësimore
PODGORICË
Podgoricë, 2009.

Izedin Kërniq Marko Jokiq Mirjana Boshkoviq

MATEMATIKA
Manuali për arsimtarët

MATEMATIKA
Priručnik za nastavnike

Botuesi: Enti i Teksteve dhe i Mjeteve Mësimore; Podgoricë

Kryeredaktore dhe redaktore përgjegjëse: Nagja Durkoviq

Redaktor: Llazo Lekoviq

Recensentë: Dr. Zhana Kovijaniq
Mr. Goran Shukoviq
Nada Novoviq
Natasha Gazivoda
Zorica Miniq

Përkthyes: Dr. David Kalaj

Ilustrimi: Sërgja Radulloviq

Dizajni: Studio MOUSE

Lektura: Dimitrov Popoviq

Për botuesin: Nebojsha Dragoviq

Shtypi: Studio Mouse - Podgorica

Tirazhi 50

ISBN 978-86-303-1439-1

Këshilli i Arsimit të Përgjithshëm, me vendimin nr. 04-3-18, të datës 1. 4. 2009 e ka miratuar këtë komplet të Tekstit mësimor për përdorim në shkollën fillore nëntëvjeçare.

PËRMBAJTJA:

I. Sistemi koordinativ kënddrejtë i Dekartit
1. Boshti koordinativ.....7
Qëllimet operative.....7
Udhëzimet didaktike.....7
2. Sistemi koordinativ kënddrejtë i Dekardit.....14
Qëllimet operative.....14
Udhëzimet didaktike.....14
3. Paraqitja grafike e të dhënave.....22
Qëllimet operative.....22
Udhëzimet didaktike.....22

II. Funksionet
1. Çfarë është funksioni?.....26
Qëllimet operative.....26
Udhëzimet didaktike.....26
2. Funksioni i përpjesëtueshmërisë së drejtë.....34
3. Funksioni i përpjesëtueshmërisë së zhdrejtë...34
Qëllimet operative.....34
Udhëzimet didaktike.....34
4. Funksioni linear.....35
Qëllimet operative.....35
Udhëzimet didaktike.....35
5. Rrjedha dhe shenja e funksionit linear.....37
Qëllimet operative.....37
Udhëzimet didaktike.....37
6. Pozita e ndërsjellë e grafikëve të funksioneve lineare.....40
Qëllimet operative.....40
Udhëzimet didaktike.....40
7. Grafikët e funksioneve të dhëna me më shumë formula.....42

III. Sistemi i dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura
1. Ekuacionet me dy të panjohura.....43
Qëllimet operative.....43
Udhëzimet didaktike.....43
Ekuacionet e njëvlershme.....45
Për cilat ekuacione themi se janë të njëvlershme?.....45
2. Ekuacionet lineare me dy të panjohura.....46
Qëllimet operative.....46
Udhëzimet didaktike.....46
3. Zgjidhja grafike e ekuacioneve me dy të panjohura.....49
Qëllimet operative.....49
Udhëzimet didaktike.....49
4. Sistemi i dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura.....51
Qëllimet operative.....51
Udhëzimet didaktike.....51
5. Zgjidhja grafike e sistemit të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura.....53
Qëllimet operative.....53
Udhëzimet didaktike.....53
6. Zgjidhja algjebrike e sistemit të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura.....56
Qëllimet operative.....56
Udhëzimet didaktike.....56

IV. Pika, drejtëza dhe rrafshi
1. Vetitë kryesore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve.
Përcaktueshmëria e rrafshit.....59
Qëllimet operative.....59
Udhëzimet didaktike.....59
Përcaktueshmëria e rrafshit.....62
2. Pozita reciproke e pikave, e drejtëzave dhe e rrafsheve në hapësirë. Ndërtimi i drejtëzave dhe i rrafsheve.....65
Pozita reciproke e dy drejtëzave në hapësirë.....65
Qëllimet operative.....65
Udhëzimet didaktike.....65
Ndërtimi i drejtëzave dhe i rrafsheve.....66
Pozita reciproke e drejtëzave dhe e rrafsheve.....67
Qëllimet operative.....67
Udhëzimet didaktike.....67
Pozita reciproke e dy rrafsheve.....68
Qëllimet operative.....68
Udhëzimet didaktike.....68
3. Këndi ndërmjet dy drejtëzave në hapësirë. Ortogonaliteti i drejtëzës dhe rrafshit. Distanca e pikës nga rrafshi.....69
Qëllimet operative.....69
Udhëzimet didaktike.....70
4. Projeksioni ortogonal në rrafsh.....72
Qëllimet operative.....72
Udhëzimet didaktike.....72
5. Këndi ndërmjet drejtëzës dhe rrafshit. Këndi ndërmjet dy rrafsheve.....72

V. Sipërfaqja e poliedrit
1. Trupat gjeometrikë. Poliedri.....74
Qëllimet operative.....74
Udhëzimet didaktike.....74
2. Prizmi.....75

Qëllimet operative.....75
Udhëzimet didaktike 75
3. Paralelepipedi. Kuboidi. Kubi.....76
Qëllimet operative.....76
Udhëzimet didaktike 76
4. Sipërfaqja e prizmit.....77
Qëllimet operative.....77
Udhëzimet didaktike 77
5. Piramida 81
Qëllimet operative.....81
Udhëzimet didaktike 81
6. Sipërfaqja e piramidës.....82
Qëllimet operative.....82
Udhëzimet didaktike 83

VI. Vëllimi i poliedrit
1. Vëllimi i trupit.....88
Qëllimet operative.....88
Udhëzimet didaktike 88
2. Vëllimi i prizmit.....89
Qëllimet operative.....89
Udhëzimet didaktike 89
3. Vëllimi i piramidës.....92
Qëllimet operative.....92
Udhëzimet didaktike 92

VII. Sipërfaqja dhe vëllimi i trupave rrotullues
1. Cilindri 95
Qëllimet operative.....95
Udhëzimet didaktike 95
2. Sipërfaqja dhe vëllimi i cilindrit 95
Qëllimet operative.....95
Udhëzimet didaktike 95
3. Koni.....96
Qëllimet operative.....96
Udhëzimet didaktike 96
4. Sipërfaqja dhe vëllimi i konit.....97
Qëllimet operative.....97
Udhëzimet didaktike 97
5. Topi (rruzulli).....98
Qëllimet operative.....98
Udhëzimet didaktike 98

HYRJE

Manuali u është kushtuar arsimtarëve dhe arsimtareve si ndihmë konkrete dhe e drejtpërdrejtë për planifikimin dhe realizimin e mësimdhënies. Në fillim të vitit shkollor arsimtari/arsimtarja duhet të ketë parasysh tërë përmbajtjen e lëndës mësimore si dhe qëllimet që duhen realizuar dhe metodat e përpunimit të temave të caktuara. Meqenëse vështrimi i tërësishëm i lëndës mësimore i mundëson arsimtarit zbatimin krijues dhe kualitativ të Tekstit, në Manual janë theksuar përmbajtjet kryesore dhe qëllimet kryesore që duhen realizuar gjatë mësimit të kësaj lënde dhe mënyrat në të cilat ato qëllime mund të arrihen duke përdorur Tekstin.

Në klasën e nëntë nxënësit përvetësojnë dhe thellojnë njohuritë në dy lëmenj:

A – Aritmetika dhe algjebra (përafërsisht 46 orë),

G – Gjeometri (përafërsisht 46 orë).

Lëmin Aritmetika dhe algjebra e përbëjnë tri tema:

A_1 – Rrafshi koordinativ. Paraqitja e të dhënave (përafërsisht 10 orë);

A_2 – Funksioni linear (përafërsisht 16 orë);

A_3 – Sistemi me dy ekuacione lineare me dy të panjohura (përafërsisht 20 orë).

Lëmin Gjeometri gjithashtu e përbëjnë tri tema:

G_1 – Pika, drejtëza dhe rrafshi (përafërsisht 10 orë);

G_2 – Prizmi dhe piramida (përafërsisht 10 orë);

G_3 – Cilindri, koni dhe topi (përafërsisht 16 orë).

Në disa raste në Programin lëndor, qëllimet operative, nga arsyet e kuptueshme, janë dhënë përafërsisht dhe në nivel të përgjithshëm. Prandaj në Manual, pothuaj për të gjitha njësitë mësimore janë dhënë:

- lista e detajuar e qëllimeve operative në të cilat flitet mbi njohuritë dhe shkathtësitë që përvetëson nxënësi duke mësuar përmbajtjet e caktuara dhe
- udhëzimet didaktike.

Për shumicën e temave në Manual është dhënë analiza e përmbajtjes. Një analizë e tillë duhet të përmbajë:

- qëllimet arsimore të temës;
- analizën logjike-metodike të temës dhe
- udhëzimet didaktike.

Në qëllimet mësimore flitet mbi njohuritë dhe shkathtësitë që i përvetëson nxënësi duke mësuar temën konkrete mësimore.

Analiza logjike- metodike e temës nënkupton vështrimin e strukturës logjike të përmbajtjes së saj dhe të atyre ideve matematike dhe metodike që përmbajnë bazën e asaj përmbajtjeje. Aty, para së gjithash, kemi parasysh:

- nocionet matematike me të cilat nxënësit takohen për të parën herë;
- lidhjen ndërmjet nocioneve të reja dhe atyre të përvetësuara më herët;
- zgjedhjen e detyrave, qëllimi i të cilave është që nxënësve t'u lehtësojë përvetësimin e nocioneve të reja;
- strukturën e teoremës (kushtet e nevojshme, kushtet e mjaftueshme, kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme) dhe lidhshmërinë e tyre me teoremat e vërtetuara më herët;
- teoremat që do të vërtetohen;
- teoremat që nuk do të vërtetohen dhe përmbajtja e të cilave do të ilustrohet me shembuj;
- zgjedhja e detyrave me të cilat do të ilustrohen përmbajtjet e teoremave të cilat nuk do të vërtetohen;
- metodat që përdoren gjatë vërtetimit të teoremave etj.

Gjatë organizimit të procesit mësimor duhet të merren parasysh zgjedhjet e metodave të mësimdhënies. Zgjedhja e metodës mësimore varet nga shumë faktorë, kurse më së shumti nga përmbajtjet që përvetësohen. Gjatë përpunimit të temave të kushtuara rrafshit koordinativ, funksioneve lineare dhe sidomos gjatë përpunimit të temave gjeometrike, në plan të parë duhet të jenë modelet e ndryshme dhe vizatimi i grafikut. Zgjedhja e metodës së mësimdhënies varet nga lloji i orës mësimore. Kështu për shembull, në orën e përvetësimit të lëndës së re më shumë përdoret metoda e shpjegimit, e bisedës, e sqarimit etj, kurse në orën e ushtrimeve dhe përsëritjes së lëndës, metoda e punës me tekstin.

Është shumë me rëndësi që duke zbatuar metodën e caktuar të mos dëmtohet korrektësia shkencore e përmbajtjeve që përpunohen. Për disa njësi mësimore në Manual janë dhënë udhëzimet

didaktike. Natyrisht, është fjala mbi idetë dhe propozimet të cilat, sipas mendimit tonë, do të mund të ndihmojnë arsimtarët që qëllimet e parashtruara t'i realizojnë në mënyrë efikase dhe interesante dhe sigurisht në mënyrë që për nxënësit të jenë të afërta dhe të kuptueshme.

Autorët

I. SISTEMI KOORDINATIV KËNDDREJTË I DEKARTIT

Para se të shqyrtojmë boshtin koordinativ, le të bëjmë disa vërejtje në lidhje me qëllimet operative që duhet realizuar gjatë punimit të temës Rrafshi koordinativ. Programi mësimor parasheh që nxënësi/nxënësja:

- të përvetësojë nocionet e sistemit koordinativ në rrafsh, të boshteve koordinative, të koordinatave të pikës;
- në sistemin koordinativ të përcaktojë pikën me koordinata të dhëna;
- pikës së dhënë në rrafshin koordinativ i shoqëron koordinatat.

Pra, nuk parashihet asnjë zbatim i metodës së koordinatave në gjeometri. Jemi të bindur se nxënësve duhet t'u tregojmë se si ajo metodë zbatohet gjatë zgjidhjes së dy detyrave standarde. Detyra e parë është formula për njehsimin e distancës ndërmjet pikave, kurse detyra e dytë është përcaktimi i koordinatave të pikës që segmentin e dhënë e ndan në raportin e dhënë. Ne mendojmë se, nëse nuk realizohen këto përmbajtje, kjo temë e humb kuptimin.

Pjesa e tekstit që pason u është kushtuar arsimtarëve të cilët vendosin që një numër i orëve të pashpërndara t'i kushtohet zbatimit të metodës koordinative gjatë zgjidhjes së detyrave gjeometrike, çfarë paraqet idenë themelore të asaj metode.

Dëshirojmë të përkrahim një vendim të tillë.

1. BOSHTI I KOORDINATAVE

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

• përsërit:

- nocionin e boshtit koordinativ;
- rregullën me të cilën pikave të boshtit koordinativ u shoqërohen numrat realë (koordinatat);
- metodat e ndërtimit të pikave, koordinatat e të cilave janë numra natyrorë, numra të plotë dhe racionalë si dhe irracionalë të formës $\sqrt{n},\ n \in N$;

• mëson se distanca ndërmjet pikave $A(x)$ dhe $B(y)$ njehsohet sipas formulës $|x-y|$;

• gjatë zgjidhjes së detyrave konkrete zbaton barazimet $|x-y| = x-y$, për $x \geq y$, gjegjësisht $|x-y| = y-x$, për $y > x$;

• përvetëson dhe zbaton procesin e përcaktimit të koordinatave të mesit të segmentit në boshtin koordinativ;

• përvetëson dhe zbaton procesin e përcaktimit të koordinatave të pikës që segmentin në boshtin koordinativ e ndan në raportin $m:n$;

• paraqet në boshtin koordinativ bashkësinë e pikave, koordinatat e të cilave plotësojnë kushtin $|x| \bigcirc c$ ose $|x-a| \bigcirc c$, ku në vend të $\bigcirc$ mund të jetë shenja e barazimit ose cilado shenjë e mosbarazimit;

• duke zbatuar domethënien gjeometrike të shprehjes $|x-y|$ zgjidh ekuacione dhe mosbarazime të formës $|x-a| \bigcirc c$, $|x-a| \bigcirc |x-b|$.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Themelimit të nocionit të Sistemit koordinativ kënddrejtë të Dekartit doemos duhet t'i paraprijë përsëritja e lëndës që lidhet me përkufizimin e boshtit të koordinatave.

Drejtëza p bëhet bosht i koordinatave vetëm kur në të veçohen dy pika të ndryshme O dhe E, ashtu që sipas marrëveshjes, pika E vendoset majtas nga pika O.

Cili është roli i atyre pikave?

Pikat *O* dhe *E* përcaktojnë segmentin *OE* i cili përkufizon njësinë për matjen e gjatësive të segmenteve në boshtin e koordinatave. Krahas kësaj, ato pika përkufizojnë drejtimin pozitiv në boshtin koordinativ, si drejtim prej pikës *O* në pikën *E*.

Kur arsimtari përshkruan rregullën sipas të cilës pikave të boshtit koordinativ u shoqërohen numrat realë (koordinatat) dhe theksohen vetitë e saj (Teksti mësimor, faqe 8-9), ai paraprakisht përsërit lëndën dhe procesin e ndërtimit të pikave, koordinatat e të cilave janë numra natyrorë, numra të plotë dhe racionalë, si dhe irracionalë të formës $\sqrt{n},\ n \in N$.

Si motiv mund të shërbejë pyetja:

A mundet, për çdo numër real *x*, të ndërtohet (me ndihmën e rigës dhe kompasit) në boshtin e koordinatave pika, koordinata e së cilës është numri real *x*?

Në lidhje me këtë detyrë, arsimtari mund të tregojë historinë mbi kuadraturën e rrethit, e cila me siguri do t'u zgjojë nxënësve interes.

Problemi i kuadraturës së rrethit është një nga problemet më të njohura të matematikës, i cili edhe krahas përpjekjeve të mëdha të matematikanëve dhe adhuruesve të matematikës që ta zgjidhin, ka mbetur i pazgjidhur që më shumë se dy mijë vjet. Numri i njerëzve që duke dëshiruar famën, kanë publikuar se kanë zgjidhur problemin e kuadraturës së katrorit, ka qenë i madh. Mirëpo çdo "zgjidhje" e tillë e këtij problemi ka përmbajtur një gabim. Mendohet se për zgjidhjen e këtij problemi janë bërë më shumë përpjekje intelektuale se për dërgimin e njeriut në Hënë.

Kuadratura e rrethit është në të vërtetë emërtimi i shkurtuar i detyrës së mëposhtme:

Të përcaktohet mënyra e cila mundëson që për çdo rreth, me ndihmën e rigës dhe kompasit, të ndërtohet katrori, sipërfaqja e të cilit është e barabartë me sipërfaqen e katrorit.

Është e qartë se për çdo rreth ekziston një katror i tillë. Parashtrohet pyetja, a mund të ndërtohet për çdo rreth një katror i tillë me ndihmën e rigës dhe të kompasit.

Le të jetë *r* rrezja e rrethit dhe *a,* gjatësia e brinjës së katrorit. Atëherë kemi:

$$S\,(rrethit) = r^2\pi \text{ dhe } S\,(katrorit) = a^2.$$

Nga barazia e sipërfaqeve rrjedh se $a^2 = r^2\pi$ gjegjësisht $a = r\sqrt{\pi}$. Pra, problemi i kuadraturës së rrethit nënkupton që me ndihmën e rigës dhe kompasit të ndërtohet katrori, brinja e të cilit ka gjatësinë $a = r\sqrt{\pi}$. Dihet se si me ndihmën e rigës dhe të kompasit ndërtohet katrori kur është e dhënë gjatësia e brinjës së tij. Në këtë mënyrë, problemi i kuadraturës së rrethit sillet në detyrën që me ndihmën e rigës dhe kompasit të ndërtohet brinja e katrorit të kërkuar, d.m.th. segmenti me gjatësi $a = r\sqrt{\pi}$.

Parashtrohet pyetja se a është i mundshëm ndërtimi i segmentit me gjatësi $r\sqrt{\pi}$ me ndihmën e rigës dhe kompasit?

Arsimtari thekson se thelbi i kësaj pyetjeje do të shqyrtohet më qartë kur të përsëriten veprimet e ndërtimit të pikave, koordinatat e të cilave janë numra natyrorë, racionalë, si dhe irracionalë të trajtës $\sqrt{n},\ n \in N$. Përpunohen shembujt 1.1, 1.2 dhe 1.3 (Teksti, faqet 9-10). Në lidhje me shembullin 1.3 (Teksti, faqja 10) duhet të ceket se kur në figurën 1.8. merren segmentet *OC* = *a* dhe *OB* = *b*, do të përftohet segmenti me gjatësi $x = \sqrt{ab}$, d.m.th. pika në boshtin e koordinatave, koordinata e së cilës është $\sqrt{ab}$.

Gjatësitë e segmenteve janë numra. Numrat i mbledhim, i zbresim, i shumëzojmë dhe i pjesëtojmë.

Tani parashtrohet pyetja e natyrshme:

Janë dhënë segmentet me gjatësi *a* dhe *b*. Si të ndërtojmë segmentet me gjatësi

a+b, a-b, a>b, ab dhe $\frac{a}{b}$ **?**

Ndërtimi i segmenteve me gjatësi *a* + *b* dhe *a-b, a>b*, është paraqitur në figurat 1 dhe 2.

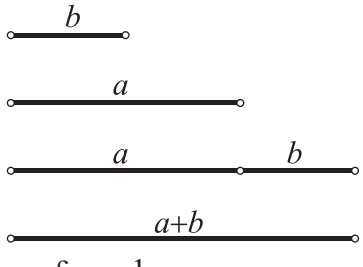


figura 1.

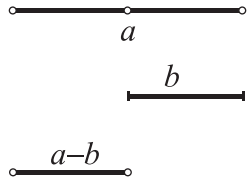


figura 2.

Do të tregojmë se si ndërtohen segmentet me gjatësi *ab* dhe $\frac{a}{b}$ pa zbatimin eksplicit të nocionit të ngjashmërisë së trekëndëshave (i cili nuk është i paraparë me planin lëndor). Për atë ndërtim na nevojitet një teoremë, që do ta vërtetojmë duke zbatuar fletën mësimore.

FLETA MËSIMORE NR. 1.

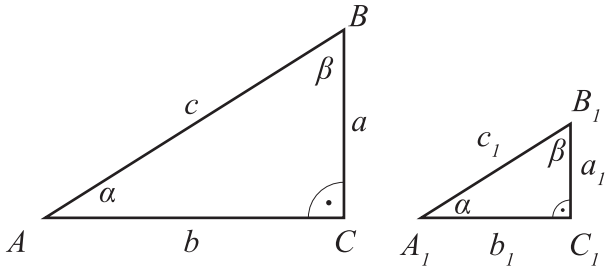


figura 3.

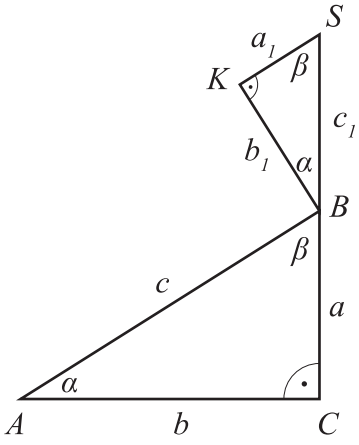


figura 5.

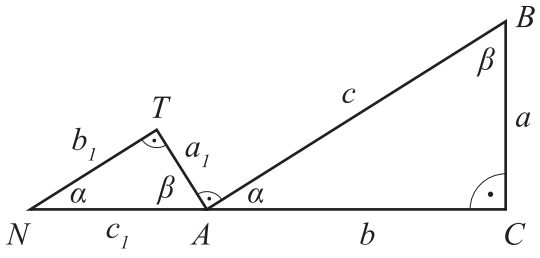


figura 4.

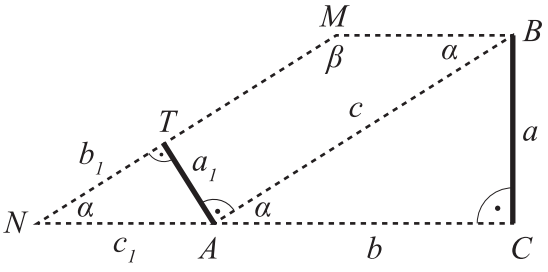


figura 6.

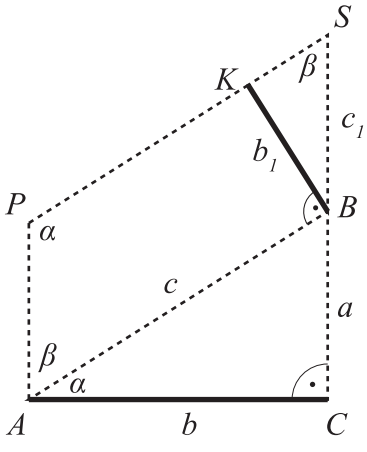


figura 7.

Në figurën 3. janë paraqitur dy drejtkëndësha kënddrejtë *ABC* dhe $A_1B_1C_1$, të tillë që çdo kënd i brendshëm i njërit prej atyre trekëndëshave është i barabartë me një kënd të brendshëm të trekëndëshit tjetër.

Çiftet e brinjëve (a, a_1), (b, b_1) dhe (c, c_1), përballë këndeve të barabarta, do t'i quajmë **brinjët përkatëse** të atyre trekëndëshave.

a) Në figurat 4. dhe 5. janë vizatuar trekëndëshat ATN dhe BSK kongruentë me trekëndëshin $A_1B_1C_1$.

b) Figurat 4. dhe 6. gjegjësisht 5 dhe 7 tregojnë mbi procesin e ndërtimit të paralelogrameve $NABM$ dhe $ABSP$. Në ata paralelogram janë shënuar nga 2 lartësi:

• lartësia $a_1 = AT$ e paralelogramit $NABM$ që i përgjigjet brinjës $c = AB$ dhe lartësia $a = BC$ që i përgjigjet brinjës $c_1 = AN$,

• lartësia $b_1 = KB$ e paralelogramit $ABSP$ që i përgjigjet brinjës $c = AB$ dhe lartësia $b = AC$ që i përgjigjet brinjës $c_1 = SB$.

c) Rrjedh se për sipërfaqet e atyre paralelogrameve vlen:

$S(\square NABM) = \boxed{a} \cdot \boxed{}$ dhe $S'(\square NABM) = \boxed{} \cdot \boxed{c}$;

$S(\square NABM) = \boxed{} \cdot \boxed{c}$ dhe $S'(\square ABSP) = \boxed{b} \cdot \boxed{}$.

Meqenëse anët e majta të barazimeve përkatëse janë të barabarta, rrjedh se janë të barabarta edhe anët e tyre të djathta:

$\boxed{a} \cdot \boxed{} = \boxed{} \cdot \boxed{c}$; dhe $\boxed{} \cdot \boxed{c} = \boxed{b} \cdot \boxed{}$, gjegjësisht $\frac{a}{a_1} = \frac{}{}$ dhe $\frac{c}{c_1} = \frac{}{}$.

d) Nga dy barazimet e fundit përftojmë $\frac{a}{a_1} = \frac{}{} = \frac{}{}$.

Përfundim: Në qoftë se çdo kënd i trekëndëshit kënddrejtë ABC është i barabartë me njërin prej këndeve të trekëndëshit kënddrejtë $A_1B_1C_1$, atëherë raportet e brinjëve përkatëse të tyre janë të barabarta:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

Shembulli 1. Ndërtimi i segmentit me gjatësi *ab.*

• Të ndërtojmë trekëndëshin kënddrejtë AA_1B_1, katetet e të cilit kanë gjatësitë $AA_1 = 1$ dhe $A_1B_1 = b$ dhe në vazhdim të katetit vendosim segmentin $AB = a$ (figura 8a.).

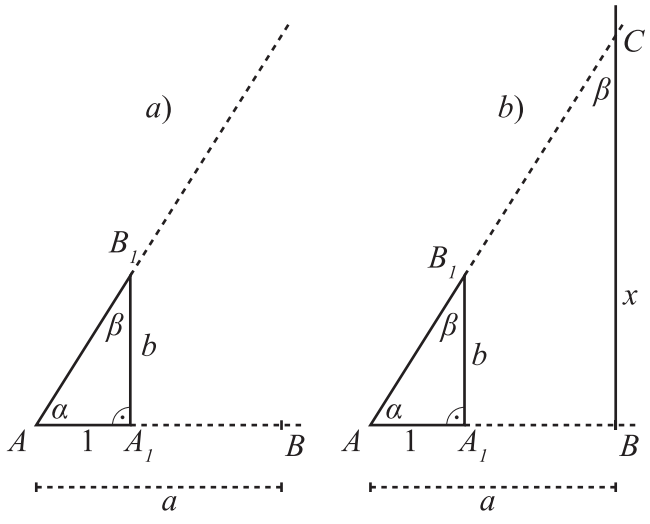


figura 8.

• Të ndërtojmë trekëndëshin kënddrejtë *ABC* (figura 8b.).

• Çdo kënd i trekëndëshit kënddrejtë *ABC* është i barabartë me njërin prej këndeve të trekëndëshit AA_1B_1, prandaj në ata trekëndësha mund të zbatohet teorema mbi raportin e brinjëve përkatëse:

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{1}/\cdot a \text{ d.m.th. } x=ab.$$

Shembulli 2. Ndërtimi i segmentit me gjatësi $\frac{a}{b}$.

• Të ndërtojmë trekëndëshin kënddrejtë AA_1B_1, katetet e të cilit kanë gjatësitë $AA_1=1$ dhe $A_1B_1=b$ dhe në katetin AA_1 ndërtojmë pingulen $AM=a$ (figura 9*a*).

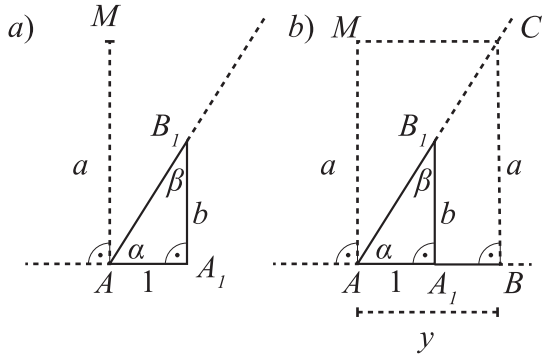


figura 9.

• Të ndërtojmë trekëndëshin kënddrejtë *ABC* (figura 9b.).

• Çdo kënd i trekëndëshit kënddrejtë *ABC* është i barabartë me një kënd të trekëndëshit kënddrejtë AA_1B_1, prandaj edhe në ata trekëndësha mund të zbatohet teorema mbi raportin e brinjëve përkatëse:

$$\frac{y}{a}=\frac{1}{b}/\cdot a \text{ d.m.th. } y=\frac{a}{b}.$$

Arsimtari kthehet tek problemi i ndërtimit të segmentit me gjatësinë $r\sqrt{\pi}$.

Le të jetë rrezja e rrethit e barabartë me një numër racional ose numër irracional që ka trajtën $\sqrt{n}, n\in N$. Më herët kemi mësuar se si ndërtohet segmenti, gjatësia e të cilit është njëri prej atyre numrave. Sikur të dinim si ndërtohet segmenti me gjatësi $a=r\sqrt{\pi}$ do të mund të vepronim si në shembullin 2 dhe të ndërtojmë segmentin me gjatësi $\frac{r\sqrt{\pi}}{r}=\sqrt{\pi}$. Atëherë do të mund të vepronim si në shembullin 1 dhe të ndërtojmë segmentin me gjatësi $\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\pi}=\pi$.

Pra, sikur të ndërtonim segmentin me gjatësi $r\sqrt{\pi}$, atëherë do të mund të ndërtonim segmentin me gjatësi π. Mirëpo, matematikani gjerman Karl Lindeman, në vitin 1882, ka vërtetuar se me ndihmën e rigës dhe kompasit nuk mund të ndërtohet segmenti me gjatësi π dhe kështu ka zgjidhur problemin e kuadraturës së rrethit:

Ekzistojnë rrathët për të cilët, me ndihmën e rigës dhe kompasit nuk mund të ndërtohet katrori, sipërfaqja e të cilit është e barabartë me sipërfaqen e ndonjërit prej atyre rrathëve.

A ekzistojnë rrathët, për të cilët një gjë e tillë mund të realizohet ? Natyrisht ekzistojnë. Sipërfaqja e rrethit me rreze $r=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ është e barabartë me 1. Është e qartë se me ndihmën e rigës dhe kompasit mund të ndërtohet katrori me sipërfaqe 1.

Në fund t'i përgjigjemi pyetjes hyrëse:

Ekzistojnë numrat, për të cilët, me ndihmën e rigës dhe të kompasit nuk mund të ndërtohen pikat në boshtin e koordinatave, koordinatat e të cilave janë ata numra.

Distanca ndërmjet pikave në boshtin e koordinatave nuk është përpunuar në detaje në klasat e mëparshme.

Fjala është mbi përmbajtjen e rëndësishme për kuptimin gjeometrik të nocionit të vlerës absolute, me çfarë nxënësit i bëhen më të qarta shënimet analitike të disa nënbashkësive të boshtit të koordinatave, që përdoren shpeshherë në matematikë dhe në shkencat e tjera natyrore.

Edhe më me rëndësi është se nxënësit, duke përvetësuar formulën për njehsimin e distancës ndërmjet pikave në boshtin e koordinatave, do të arrijnë njohuri të cilat do t'u mundësojmë që për herë të parë gjatë shkollimit të tyre të deritashëm të zgjidhin një detyrë gjeometrike me metodën e koordinatave, çfarë është edhe ideja themelore e asaj metode. Aty kemi parasysh përcaktimin e koordinatave të pikës, e cila segmentin e dhënë në boshtin e koordinatave e ndan në raportin $m:n$.

Formulën për njehsimin e distancës ndërmjet pikave *A(x)* dhe *B(y)* nxënësit duhet ta përvetësojnë duke zgjidhur detyra konkrete, që mundësojnë verifikimin e drejtpërdrejtë të saktësisë së saj. Në Tekst, i tillë është shembulli 1.6. Në këtë shembull dhe në shembujt e ngjashëm nxënësit mund të përvetësojnë edhe procesin e përcaktimit të distancës ndërmjet pikave në boshtin e koordinatave, duke mos përdorur vlerën absolute (shiko figurat 1.9 – 1.13, Teksti, faqja 12). Ky është një hap i rëndësishëm në kuptimin gjeometrik të përmbajtjes së barazimit $|x-y|=x-y$, për $x \geq y$, gjegjësisht $|x-y|=y-x$, për $y>x$. Një mënyrë e tillë e zbatimit të shprehjes $|x-y|$ mundëson që problemi i përcaktimit të pikës, e cila segmentin në boshtin e koordinatave e ndan në raportin e dhënë, sillet në zgjidhjen e dy ekuacioneve lineare të thjeshta (shembulli 1.7. dhe 1.8. në Tekst).

Detyrat në të cilat kërkohet që në boshtin koordinativ të ndërtohen bashkësitë e pikave, koordinatat e të cilave plotësojnë njërin prej kushteve $|x| \bigcirc c$ ose $|x-a| \bigcirc c$ duhen përkthyer doemos në gjuhën gjeometrike. Për shembull, kushtin:

1) $|x| \leq a$ e plotësojnë pikat në boshtin koordinativ, distanca e të cilave nga pika *O* është më e vogël ose e barabartë me a,

2) $|x-5| \geq 2$ e plotësojnë pikat në boshtin koordinativ, distanca e të cilave nga pika A (5) është më e madhe ose e barabartë me 2,

3) $|x+5|=|x-(-5)| \geq 2$ e plotësojnë pikat në boshtin koordinativ, distanca e të cilave nga pika *A (-5)* është më e madhe ose e barabartë me 2.

Një kuptim i tillë i shprehjes $|x-y|$ mundëson zgjidhjen e disa ekuacioneve të thjeshta me vlerën absolute, dhe rrjedhimisht edhe skicimin e disa nënbashkësive të boshtit koordinativ. Të japim disa shembuj

1. Lexo këto ekuacione duke përdorur fjalën "distanca", pastaj përcakto zgjidhjet e tyre:

a) $|x-3|=2$, *b*) $|x+3|=2$,

c) $|x+1|=5$, *d*) $|x+4|=3$.

Shembulli 3. Zgjidhe ekuacionin $|x+5|=3$.

Zgjidhje: Ekuacioni $|x+5|=3$ shënon se pika *x* ndodhet në distancën 3 nga pika -5:

$$|x-(-5)|=|x+5|=3.$$

Në figurën 10 shohim se ekuacioni i dhënë ka dy zgjidhje $x_1=-8$ dhe $x_2=-2$.

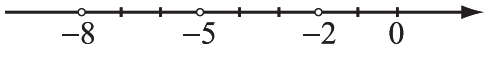


figura 10.

2. Lexoji këto ekuacione duke përdorur fjalën "distanca", pastaj përcakto zgjidhjet e tyre:

a) $|x|=|x-6|$, *b*) $|x-3|=|x-9|$,

c) $|x|=|x+12|$, *d*) $|x+4|=|x-8|$.

Shembulli 4. Zgjidhe ekuacionin $|x-7|=|x+3|$.

Zgjidhje: Ekuacioni $|x-7|=|x+3|$ shënon se distanca e pikës *x* nga pika -3

($|x-(-3)|=|x+3|$) është e barabartë me distancën e pikës x nga pika 7 ($|x-7|$). Me fjalë të tjera, pika x është mesi i segmentit, pikat e skajshme të të cilit janë –3 dhe 7. Në drejtëzën koordinative vizatojmë pikat e skajshme të atij segmenti (figura 11.).

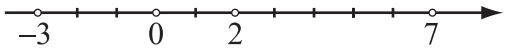


figura 11.

Mesi i tij është $x = 2$ dhe kjo është zgjidhja e ekuacionit të dhënë.

Vërejtje: Le të jetë c mesi i segmentit, pikat e skajshme të të cilit janë a dhe b. Në figurën 12 është shënuar intervali $[c, +\infty)$

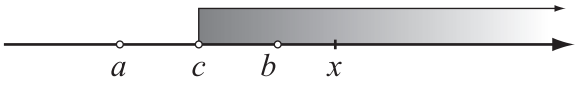


figura 12.

Distanca $|x-b|$ e një pike të çfarëdoshme x të atij intervali nga pika b është më e vogël ose e barabartë se distanca $|x-a|$ e pikës x nga pika a. Prandaj, intervali $[c,+\infty)$ është zgjidhje e inekuacionit $|x-b|\le|x-a|$.

Në figurën 13. është shënuar intervali $(-\infty,c]$.

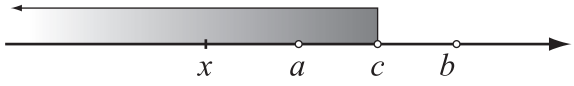


figura 13.

Distanca $|x-a|$ e një pike të çfarëdoshme x të atij intervali nga pika a është më e vogël ose e barabartë se distanca $|x-b|$ e pikës x nga pika b. Prandaj, intervali $(-\infty,c]$ është zgjidhje e inekuacionit $|x-a|\le|x-b|$.

3. Lexo këto inekuacione duke përdorur fjalën "distanca", pastaj përcakto zgjidhjet e tyre:

a) $|x|\ge|x-2|$, *b*) $|x+3|\le|x-5|$.

Shembulli 5. Të zgjidhet inekuacioni $|x-1|\le|x+5|$.

Zgjidhje: Inekuacioni $|x-1|\le|x+5|$ nënkupton se distanca e pikës x nga pika 1 ($|x$-1|) është më e vogël ose e barabartë se distanca e pikës x nga pika –5 ($|x-(-5)|=|x+5|$). Mesi i segmentit, pikat e skajshme të të cilit janë –5 dhe 1 është $c=-2$. Në figurën 14 shohim se bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit të dhënë është intervali $[-2,+\infty)$.

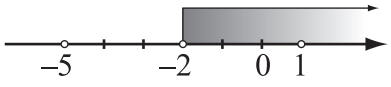


figura 14.

2. SISTEMI KOORDINATIV KËNDREJTË I DEKARTIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e sistemit koordinativ dhe përdor emërtimet: boshti i abshisave ose boshti x, boshti i ordinatave ose boshti y dhe rrafshi koordinativ;
- përvetëson rregullën sipas të cilës çdo pike në rrafshin koordinativ i shoqërohen dy numra dhe ata numra i quan koordinatat e pikës;
- përvetëson vetinë e asaj rregulle;
- përvetëson domosdoshmërinë e shënimit të koordinatave të pikës në formën e çiftit të radhitur;
- përvetëson shenjën $A(x,y)$ për pikën, koordinatat e të cilës janë x dhe y;
- përvetëson emërtimet: abshisë për koordinatën e parë dhe ordinatë për koordinatën dytë;
- mëson të ndërtojë pikën në rrafsh, koordinatat e të cilës janë numrat e dhënë;
- mëson të përcaktojë koordinatat e pikës së dhënë në rrafsh;
- përvetëson se pikat në boshtet e koordinatave mund të kuptohen në dy mënyra, si pika të atyre boshteve kur kanë një koordinatë dhe si pika të rrafshit koordinativ, kur kanë dy koordinata;
- përvetëson se pikat në boshtin x kanë koordinatat $(x,0)$, kurse në boshtin y $(0,y)$;
- përvetëson ndarjen e rrafshit koordinativ në katër kuadrante dhe është në gjendje që vetëm në bazë të koordinatave të pikës së dhënë të tregojë se cilit kuadrant i takon ajo pikë;
- mëson që të shënojë në rrafshin koordinativ bashkësinë e pikave, abshisat e të cilave plotësojnë njërin prej kushteve $|x| \bigcirc c$ ose $|x-a| \bigcirc c$, si dhe bashkësinë e pikave, ordinatat e të cilave plotësojnë njërin prej kushteve $|y| \bigcirc c$ ose $|y-a| \bigcirc c$, ku në vend të $\bigcirc$ mund të vendoset cilado shenjë e mosbarazimit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Ideja e sistemit koordinativ kënddrejtë është aq e thjeshtë dhe natyrore, sa që do të ishte vështirë të gjendet një qasje tjetër, e cila përkufizimin e çiftit të renditur për nxënësit do ta bënte më të përshtatshme se mënyra standarde e futjes në përdorim të atij nocioni.

Idenë e shoqërimit të koordinatave, pikave në rrafsh, mund t'ua afrojmë nxënësve me një fletë mësimore si më poshtë:

FLETA MËSIMORE NR. 2

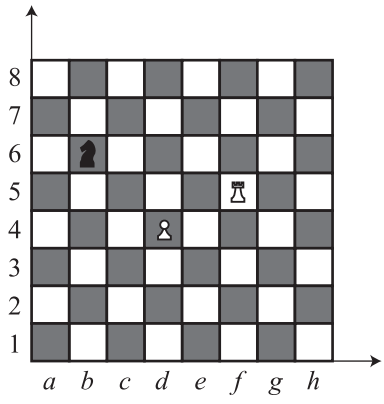


figura 15.

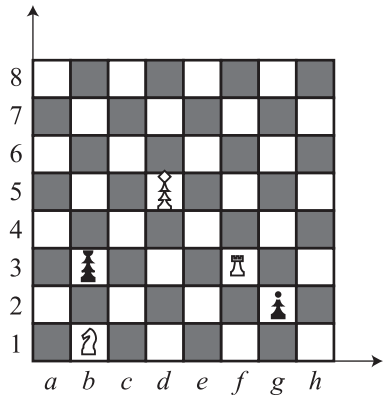


figura 16.

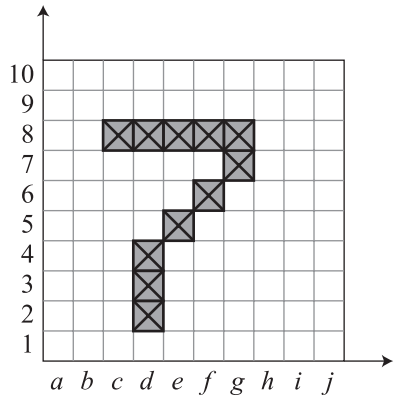


figura 17.

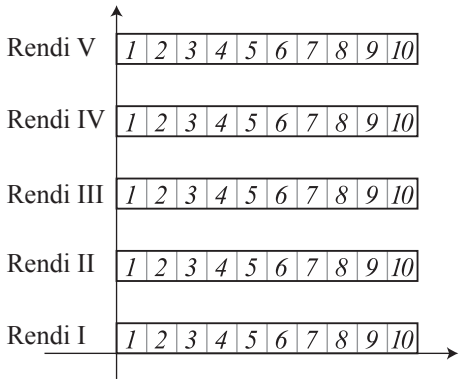


figura 18.

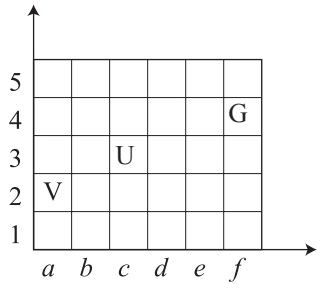


figura 19.

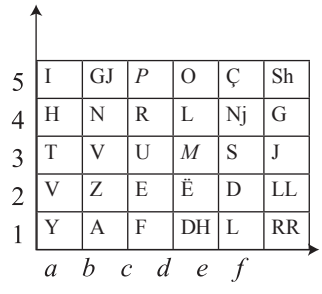


figura 20.

• Lexo tekstin e shembujve 2.1. 2.2. (Teksti faqe 15.), pastaj zgjidhi detyrat e mëposhtme:

1. Në tabelën e shahut (figura 15.), janë vendosur figurat e bardha ushtari dhe torra, si dhe figura e zezë kali. Përcakto koordinatat e tyre në tabelën e shahut.

Përgjigjja: ushtari – $d4$, torra –_____, kali –_____.

2. Në tabelën e shahut (figura 16.), janë vendosur figurat e bardha kali, torra dhe mbretëresha si dhe figurat e zeza mbreti dhe oficeri). Përcakto koordinatat e atyre figurave në bordin e shahut.

Përgjigjja: kali –_____, torra –_____, mbretëresha –_____,
mbreti –_____, oficeri –_____.

3. Në katrorin 10x10 në figurën 17 është shënuar shifra 7. Të përcaktohen koordinatat e katrorëve të vegjël me ndihmën e të cilëve është formuar ajo shifër.

Përgjigjja: $(d,2)$, (,), (,), (,), (,), (,), (,),
(,), (,), (,) dhe (,).

4. Në figurën 18 është paraqitur një sallë e vogël kinemaje. Shënoji (hijezoji) ndenjëset me koordinata $(I,8)$, $(II,5)$, $(III,7)$, $(IV,2)$, $(V,9)$.

5. Përcaktoji koordinatat e figurave *V, U* dhe *G* në figurën 19.

6. E zëmë se nga një mik ke marrë një mesazh të shifruar
$(b,4)$ $(c,2)$ $(e,3)$ $(d,2)$ $(c,4)$ $(b,4)$ $(d,2)$ $(f,5)$ $(a,3)$ $(b,1)$ $(a,3)$ $(d,2)$
me anë të cilës ai të informon mbi kohën e takimit në vendin tuaj të preferuar. Në bazë të figurës 20, deshifroje atë mesazh (zgjidhja: Nesër në shtatë).

Mbas përkufizimit të sistemit koordinativ duhet të përpunohet një numër i caktuar detyrash në të cilat nga nxënësi kërkohet që në rrafshin koordinativ të përcaktojnë

- pikën me koordinata të dhëna;
- koordinatat e pikës së dhënë.

Detyrat me përmbajtje të tilla dhe formulime të tipit "përcakto pikat me koordinata të dhëna" dhe "përcakto koordinatat e pikave të paraqitura në figurë" nuk shkaktojnë interesim tek nxënësit, mirëpo duhet të përpunohen edhe disa shembuj të tillë (Përmbledhja, faqe 7, 8 detyrat 2.1-2.7). Fjala është mbi detyrat në të cilat nuk ceket asnjë problem konkret dhe reagimi mund të jetë "i kam gjetur pikat e kërkuara dhe çfarë të bëj me to". Detyra të tilla mund të bëhen interesante, në qoftë se duke i zgjidhur ato, bëhet deshifrimi i një mesazhi (Përmbledhja, faqe 8, detyra 2.8.), përftohet një vizatim (Përmbledhja, faqe 8, detyra 2.9., 2.10. dhe 2.11.) ose zgjidhet ndonjë problem gjeometrik (Përmbledhja, faqe 10, 11, 12 detyra 2.16-2.21 dhe 2.23 - 2.28.).Të shikojmë se si mund të përpunohet detyra 2.8

Arsimtari i ndan nxënësit në katër grupe. Secili grup fiton fletën me tabela dhe formulime detyrash.

Grupi I. Përcaktoni koordinatat e pikave *E, Q, F, G* dhe *A* në figurën 2.3.

Grupi II. Përcaktoni koordinatat e pikave *T, K, U, S* dhe *O* në figura 2.3.

Grupi III. Përcaktoni koordinatat e pikave *C, R, J, N* dhe *Z* në figurën 2.3.

Grupi IV. Përcaktoni koordinatat e pikave *I, D, H, V* dhe *Nj* në figurën 2.3.

(–1,3)	(4, –4)	(0,2)	(–6,0)	(–1, –2)	
(–1,3)	(–6,0)	(0,2)	(5,0)	(4,5)	(–4, –2)

(–1,3)	(–4,2)	(4,5)	(0, –4)	(4,5)	(–5, –5)	(–1,3)	(–4,2)	(0,0)
(–3, –5)	(0,2)	(–1, –1)	(0,2)	(–5, –5)	(0,0)			

(7,2)	(0,0)	(–5, –5)	(–1,3)	(–4,2)	(–1, –2)	
(4, –4)	(–1, –2)	(–3, –5)	(0,2)	(–4,2)	(4,5)	(–6, –4)

(–1, –2)	(–1,3)	(4,5)	(–4,2)
(4, –2)	(–3,3)	(–6,0)	(–4, –2)

Fletët që i përftojnë grupet kanë tabela të njëjta, por ndryshojnë në tekstin e detyrës.

Arsimtari: Hapni përmbledhjen dhe në faqen 8 gjeni detyrën 2.8. me të cilën lidhet figura 2.3. Secili grup përcakton koordinatat e pikave që i ka përftuar. Detyra juaj është që në secilën tabelë, nën secilën fushë, në të cilën janë shënuar koordinatat, të shkruani shkronjën me të cilën në figurën 2.3. është shënuar ajo pikë. Për shembull, $\boxed{\frac{(-3,-2)}{N}}$. Kur të zgjidhni detyrën, do të përftoni emrat e një:

- pushimoreje;
- liqeni;
- vepre letrare dhe
- shkencëtari të njohur.

Grupi, që e përfundon punën i pari, merr nga arsimtari fletën me tabela të njëjta, mirëpo pa formulime të detyrave. Në tabela duhet përshkruar çfarë ka shënuar grupi në tabelat e përftuara më herët. Arsimtari e merr atë fletë dhe ua jep grupeve të tjera sipas radhës. Në këtë mënyrë do të përftohet fleta me tabela të plotësuara. Arsimtari i lexon emrat e përftuar: Sveti Stefan, Liqeni i Shkodrës, Kurora e Maleve dhe Isak Njutoni (kjo detyrë ka mbetur e pa adaptuar në gjuhën shqipe për shkak të gabimeve gjatë thyerjes së tekstit, dhe i propozojmë arsimtarit që ta adaptojë në gjuhën shqipe).

Të japim edhe një shembull.

FLETA MËSIMORE NR. 3

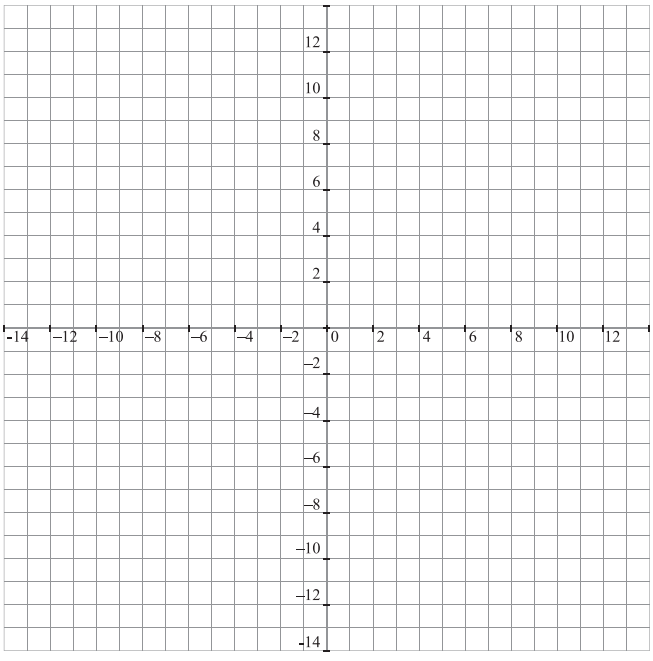


figura 21.

Janë dhënë koordinatat e 43 pikave:
(4,–3), (2,–3), (2,–2), (4,–2), (4,–1), (3,1), (2,1), (1,2), (0,0), (–3,2),
(–4,5), (0,8), (2,7), (6,7), (8,8), (10,6), (10,2), (7,0), (6,2), (6,–2),
(5,–3), (4,–3), (4,–5), (3,–9), (0,–8), (1,–5), (1,–4), (0,–4), (0,–9), (–3,–9),
(–3,–3), (–7,–3), (–7,–7), (–8,–7), (–8,–8), (–11,–8), (–10,–4), (–11,–1),(–14,–3),(–12,–1),
(–11,2), (–8,4), (–4,5).

Ndërto pikën e parë, pastaj pikën e dytë dhe tërhiq segmentin që i lidh ato dy pika. Kur të ndërtosh pikën e tretë, tërhiq segmentin që e lidh me pikën e dytë të ndërtuar sipas radhës. Ky proces duhet vazhduar derisa të ndërtohet pika e fundit dhe ajo të lidhet me pikën e parafundit dhe të parë njëkohësisht. Si rezultat do të përftosh figurën e një kafshe dhe, në qoftë se në veçanti i ndërton pikat (2, 4) dhe (6, 4), do të përftosh sytë e asaj kafshe.

Rezultati është dhënë në figurën 22.

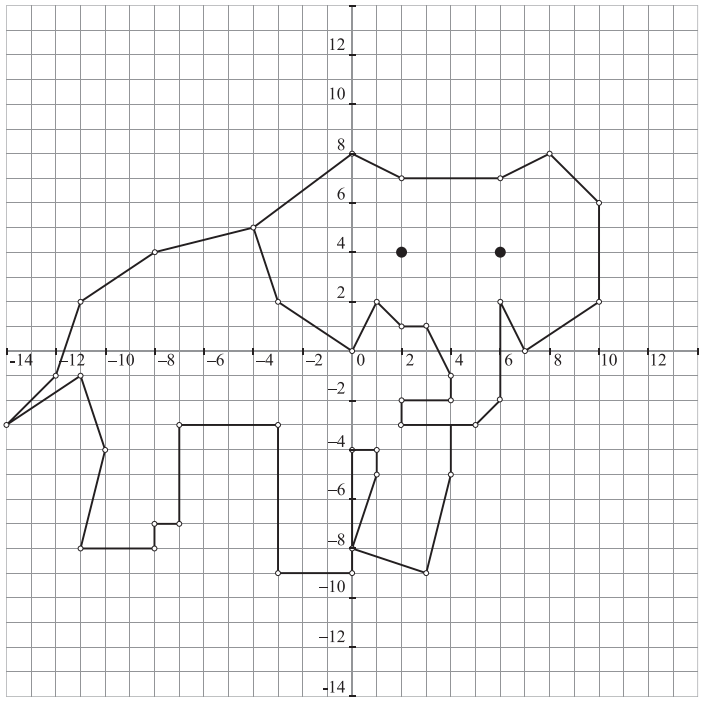


figura 22.

Si detyra interesante me përmbajtje gjeometrike ju propozojmë detyrat 2.17. dhe 2.20. (Përmbledhja,

faqe 10 dhe 11). Ato detyra mund t'i shfrytëzoni si shkas që të përsëriten përkufizimet e trapezit barakrahës dhe kënddrejtë, paralelogramit, rombit, drejtkëndëshit dhe katrorit.

Në hyrje kemi cekur bindjen tonë që nxënësve duhet t'u tregohet zbatimi i metodës së koordinatave në zgjidhjen e dy detyrave:

- përcaktimin e formulës për njehsimin e distancës ndërmjet pikave dhe
- përcaktimin e koordinatave të pikës, e cila segmentin në rrafsh e ndan në raportin e dhënë.

Të fillojmë me formulën për njehsimin e distancës ndërmjet pikave, të cilën do ta përcaktojmë në dy mënyra. Mënyra e parë është standarde dhe shpeshherë takohet në literaturë. Mënyra e dytë bazohet në zhvendosjen paralele të segmentit dhe këtë mënyrë e përcjell figura me më pak detaje se sa në rastin e parë.

a) Le të jenë dhënë në rrafsh pikat $A(x_1, x_1)$ dhe $B_2(x_2, y_2)$. Gjatë formimit të figurës 23., arsimtari komenton çdo detaj në figurë. Pingulet e lëshuara nga pikat A dhe B në boshtet e koordinatave i presin ato boshte në pikat, koordinatat e të cilave janë x_1 dhe x_2 në boshtin x, gjegjësisht y_1 dhe y_2 në boshtin y.

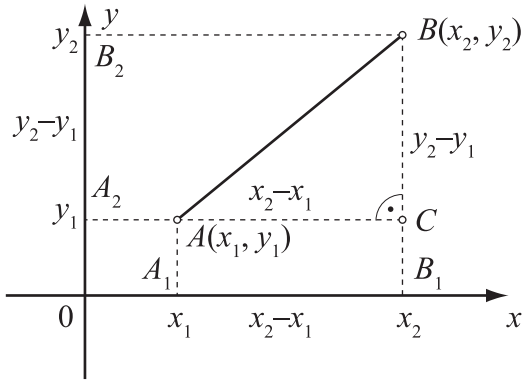


figura 23.

Duke zbatuar formulën për njehsimin e distancës së pikave në drejtëz, përftojmë $A_1B_1 = x_2 - x_1$ dhe $A_2B_2 = y_2 - y_1$. Në bazë të teoremës, sipas të cilës, segmentet paralele ndërmjet drejtëzave paralele janë të barabarta, përftojmë $AC = A_1B_1 = x_2 - x_1$ dhe $A_2B_2 = BC = y_2 - y_1$.

Distanca $d(A, B)$ ndërmjet pikave A dhe B, d.m.th. gjatësia e hipotenuzës AB të trekëndëshit kënddrejtë ABC njehsohet duke zbatuar teoremën e Pitagorës në atë trekëndësh:

$$d(A,B) = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

b) Supozojmë se segmenti AB, pikat e skajshme të të cilit janë A $(x_1, y_1,)$ dhe B (x_2, y_2)ka pozitën e paraqitur në figurën 24. Duke bërë zhvendosjen paralele për x_1 segmente njësi në drejtimin negativ të boshtit x, atë segment e sjellim në pozitën A_1B_1.

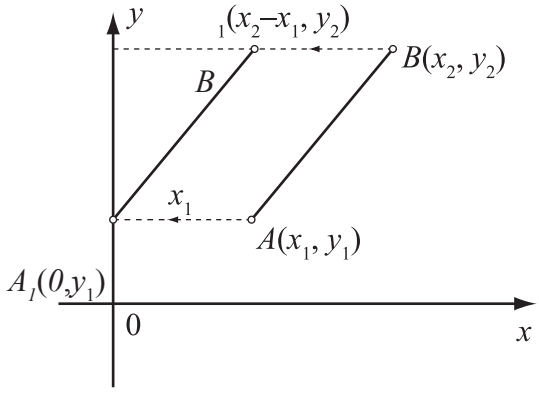


figura 24.

Gjatë kësaj zhvendosjeje ordinatat e pikave të skajshme të segmenteve kanë mbetur të njëjta, kurse abshisat janë zvogëluar për x_1. Duke bërë zhvendosjen paralele të segmentit A_1B_1 për y_1 segmente njësi në drejtimin negativ të boshtit y, ai sillet në pozitën OC (figura 25.).

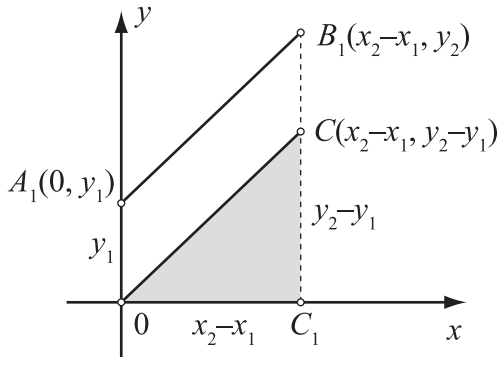


Figura 25.

Gjatë kësaj lëvizjeje ordinatat e pikave të skajshme A_1 dhe B_1 zvogëlohen për y_1, kurse abshisat mbeten të njëjta. Është e qartë se gjatësia e segmentit nuk ndryshon gjatë zhvendosjes së tij. Duke zbatuar teoremën e Pitagorës, në trekëndëshin kënddrejtë OC_1C përftojmë:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Duhet të përpunohen disa detyra të thjeshta në të cilat zbatohet formula e sipërme (Përmbledhja, faqe 11, detyra 2.22.). Në veçanti duhen përpunuar rastet kur koordinatat kanë shenja të ndryshme, sepse nxënësit në këto raste bëjnë gabime të shpeshta.

Procesin e përcaktimit të koordinatave të pikës, e cila segmentin AB e ndan në raportin e dhënë, do ta transformojmë në problemin e përcaktimit të koordinatave të pikave të cilat, projeksionet ortogonale të atij segmenti në boshtet e koordinatave e ndajnë në raportin e dhënë.

Në figurën 26. janë paraqitur pikat $A\ (x_1, y_1)$ dhe $B(x_2, y_2)$ pika $M(x, y)$, e cila segmentin AB e ndan në raportin:

$$\frac{AM}{MP}=\frac{m}{n}.$$

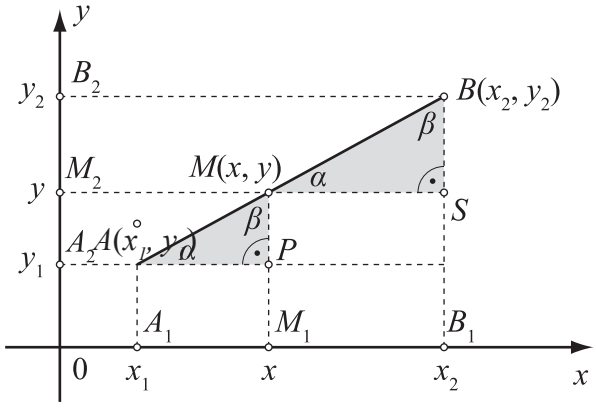


figura 26.

Le të shënojmë me A_1, M_1 dhe B_1 rrëzat e pinguleve të lëshuara nga pikat A, M dhe B në boshtin x, kurse me A_2, M_2 dhe B_2 rrëzat e pinguleve të lëshuara nga ato pika në boshtin y. Në bazë të teoremës, sipas të cilës segmentet paralele ndërmjet drejtëzave paralele janë të barabarta, përftojmë barazimet e mëposhtme:

$$A_1M_1=AP,\ \ M_1B_1=MS,\ A_2M_2=MP,\ M_2B_2=BS.$$

Çdo kënd i brendshëm i trekëndëshit APM është i barabartë me njërin prej këndeve të brendshme të trekëndëshit MSB. Nga këtu rrjedh se në ata trekëndësha mund të zbatohet teorema mbi barazimin e raporteve të brinjëve përkatëse:

$$\frac{AP}{MS}=\frac{MP}{BS}=\frac{AM}{MB}.$$

Nëse marrim parasysh se $\frac{AM}{MB}=\frac{m}{n}$ dhe nëse në barazimin e mëparshëm segmentet *AP, MS, MP* dhe *BS* i zëvendësojmë me segmentet e barabarta me to A_1M_1, M_1B_1, A_2M_2, dhe M_2B_2 përftojmë:

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1}=\frac{A_2M_2}{M_2B_2}=\frac{m}{n}.$$

Kjo do të thotë se pika M_1 e ndan segmentin A_1B_1 në raportin $m : n$, kurse pika M_2 segmentin A_2B_2 në të njëjtin raport. Si përcaktohen koordinatat e pikave M_1 dhe M_2, të cilat segmentet në boshtet e koordinatave i ndajnë në raportin e dhënë, kemi mësuar në shqyrtimet e mëparshme.

Në pajtim me shenjat në figurën 14, mund të nxjerrim përfundimin:

- abshisa e pikës *M* është e barabartë me koordinatën e pikës M_1 në boshtin *x*, e cila segmentin A_1B_1 në atë bosht e ndan në raportin $m : n$,

- ordinata e pikës *M* është e barabartë me koordinatën e pikës M_2 në boshtin *y*, e cila segmentin A_2B_2 në atë bosht e ndan në raportin $m : n$.

Në shembullin 1.7. (Teksti, faqe 12) kemi vërtetuar se koordinata e mesit të segmentit në boshtin e koordinatave është e barabartë me gjysmën e shumës se pikave të skajshme të atij segmenti (figura 27.). Nga këtu rrjedh se mesi *C* i segmentit *AB* ka koordinatat $\frac{x_1+x_2}{2}$ dhe $\frac{y_1+y_2}{2}$.

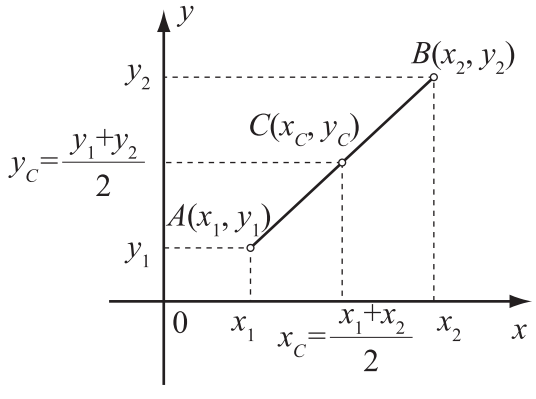


figura 27.

Abshisa e qendrës së segmentit është e barabartë me gjysmën e shumës së abshisave, kurse ordinatat me gjysmën e shumës së ordinatave të pikave të skajshme të atij segmenti.

Shembulli 1. Të përcaktohen koordinatat e mesit të segmentit, pikat e skajshme të të cilit janë $A(-4,3)$ dhe $A(6,-9)$.

Zgjidhje: $x_c=\frac{-4+6}{2}=1$ dhe $y_c=\frac{3-9}{2}=-3.$

Shembulli 2. Të përcaktohen koordinatat e pikës *M*, e cila segmentin, pikat e skajshme të të cilit janë *A*(2, 3) dhe *B*(7, 8), e ndan në raportin 3 : 2.

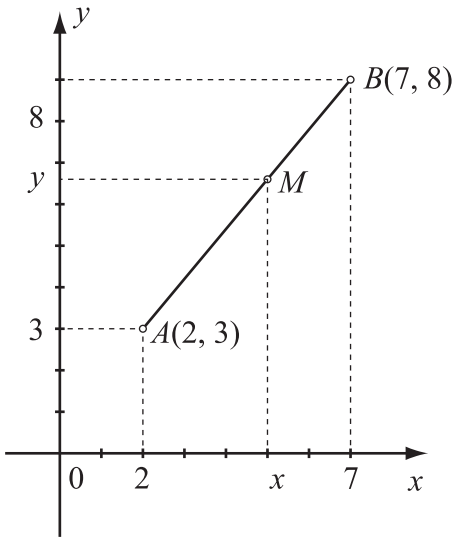


figura 28.

Zgjidhje: Në bazë të figurës 28. mund të formojnë dy sisteme, me zgjidhjen e të cilëve përftojmë koordinatat e pikës së kërkuar:

$$(x-2):(7-x)=3:2, \qquad (y-3):(8-y)=3:2,$$
$$2(x-2)=3(7-x), \qquad 2(y-3)=3(8-y),$$
$$2x-4=21-3x, \qquad 2y-6=24-3y,$$
$$5x=25, \qquad 5y=30,$$
$$x=5. \qquad y=6.$$

Pra, pika $M(5, 6)$ e ndan segmentin AB në raportin 3 : 2.

Shembuj për ushtrime që nuk ndodhen në përmbledhje.

1. Përcakto koordinatat e mesit të segmentit AB, në qoftë se:

a) $A(-6,2), B(4,4)$;

b) $A(-5,-4), B(-1,3)$.

2. Përcakto koordinatat e qendrës së vijës rrethore, në qoftë se pikat e skajshme të diametrit të tij janë $A(4,-2), B(1,3)$.

3. Në trekëndëshin OAB është tërhequr segmenti rendor OC. Përcakto koordinatat e pikës C, në qoftë se $A(-5,0)$ dhe $B(0,-3)$.

4. Pikat $A(7,-4), B(-4,3)$ dhe $C(5,0)$ janë kulmet e trekëndëshit. Përcakto koordinatat e pikave të skajshme të asaj vije të mesme të trekëndëshit e cila është paralele me brinjën AB.

5. Pikat $A(-3,6), B(8,6)$ dhe $D(4,-10)$ janë kulmet e trekëndëshit. Përcakto gjatësinë e vijës së mesme të atij trekëndëshi që është paralele me brinjën AB.

6. Pikat $A(7,3), B(5,1)$ dhe $C(1,14)$ janë kulmet e trekëndëshit. Në atë trekëndësh është tërhequr segmenti rendor AD. Përcakto gjatësinë e tij dhe koordinatat e pikës D.

7. Vërteto se katërkëndëshi, kulmet e të cilit janë pikat $A(-3,6), B(8,3), C(4,9)$ dhe $D(-7,0)$ është paralelogram.

3. PARAQITJA GRAFIKE E TË DHËNAVE

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson paraqitjen tabelore të një vargu të të dhënave numerike, në të cilat ka më shumë grupe të dhënash me vlera të barabarta dhe formon tabela me të dhëna të përftuara nga jeta e përditshme;
- përvetëson mangësinë e paraqitjes tabelore në të cilën regjistrohet frekuenca e secilës të dhënë, në rastin kur vargu ka një numër të madh kufizash;
- përvetëson se njëra prej mënyrave të paraqitjes tabelore të vargjeve me të dhëna numerike me një numër të madh kufizash është formimi i intervaleve pa pika të përbashkëta dhe regjistrimi i numrit të kufizave të vargut që u takojnë intervaleve të caktuara;
- përvetëson diagramet si vizatime, të cilat në mënyrë të qartë paraqesin raportin ndërmjet dy ose më shumë madhësive, ose ndryshimin e një madhësie në një interval kohor të caktuar;
- përvetëson diagramet rrethore (qarkore) si vizatime, të cilat në mënyrë të qartë paraqesin raportin e pjesëve të një tërësie dhe vetë tërësisë dhe formon diagrame të tilla për të dhëna nga jeta e përditshme;
- përvetëson diagramet shiritore si vizatime në të cilat paraqitet raporti ndërmjet më shumë madhësive të llojit të njëjtë;
- përvetëson diagramet me shtylla si vizatime me shtylla vertikale, me të cilat paraqitet ndryshimi i një madhësie të caktuar në një proces të dhënë;
- përvetëson diagramet me vija si vizatime, me të cilat paraqitet ndryshimi i një madhësie të caktuar në një interval kohor të caktuar.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Shpeshherë në gazeta lexojmë, kurse në televizor shikojmë dhe dëgjojmë të dhëna të ndryshme, për shembull mbi rritjen e shpenzimeve jetësore, popullaritetin e lokacioneve të caktuara turistike, vjetërsinë e popullsisë, ndryshimin e numrit të popullsisë, numrin e automobilave të shitur, numrin e banorëve që përdorin telefona celularë e kështu me radhë. Që personat e interesuar të mund të njoftohen sa më mirë me ato të dhëna dhe me të dhëna të tjera dhe nga ato të nxjerrin shpejt dhe lehtë përfundimet e nevojshme, të dhënat paraqiten në mënyrë të qartë dhe të thjeshtë në tabela dhe vizatime, diagrame. Prandaj është me rëndësi që nxënësit të aftësohen për leximin, kuptimin dhe vlerësimin kritik të tabelës dhe diagramit, si dhe për paraqitje, përpunim, analizë dhe interpretim të pavarur të të dhënave të përftuara me anë të metodave të ndryshme statistike.

Le të shqyrtojmë skemën, sipas të cilës janë formuar detyrat në Tekst dhe në Përmbledhje.

Bashkësia bazë (ose popullacioni) është bashkësia e të gjitha njësive (elementeve, anëtarëve) me një veti të caktuar, të përbashkët që dëshirojmë ta analizojmë. Ajo veti quhet karakteristikë dhe mund të ketë më shumë modalitete.

Në detyra shqyrtohen të dhënat e grumbulluara, ku të dhëna të grumbulluara nënkuptojnë procesin, me anë të cilit bashkësia bazë ndahet në nënbashkësi disjunkte sipas modaliteteve të karakteristikës ashtu që në secilën nënbashkësi klasifikohen elementet me modalitete të njëjta. Numri i elementeve të secilës bashkësi të formuar ashtu, quhet frekuencë.

Në shembullin 3.1. (Teksti, faqe 22.) bashkësinë bazë e përbëjnë nxënësit e paraleles së vështruar, karakteristikë është nota në matematikë, kurse modalitetet e karakteristikës janë notat 1, 2, 3, 4 dhe 5. Bashkësia bazë është ndarë në pesë nënbashkësi disjunkte, të cilat i përbëjnë nxënësit, që në matematikë kanë pasur sipas radhës, notat 1, 2, 3, 4, 5. Frekuencat në këtë shembull janë: $f_1 = 2,\ f_2 = 4,\ f_3 = 6,\ f_4 = 5$ dhe $f_5 = 3.$ Në këtë mënyrë përftojmë vargun

$$\underbrace{1,1}_{f_1=2},\underbrace{2,2,2,2}_{f_2=4},\underbrace{3,3,3,3,3,3}_{f_3=6},\underbrace{4,4,4,4,4}_{f_4=5},\underbrace{5,5,5}_{f_5=3}.$$

Në rastin e përgjithshëm, kur karakteristika ka s modalitete $x_1, x_2, ..., x_s$, përftohet vargu

$$\underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{f_1 \text{ herë}}, \underbrace{x_2, x_2, ..., x_2}_{f_2 \text{ herë}}, \underbrace{x_3, x_3, ..., x_3}_{f_3 \text{ herë}}, \ldots, \underbrace{x_s, x_s, ..., x_s}_{f_s \text{ herë}},$$

që ka $n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_s$ elemente. Për secilën frekuencë f_i mund të njehsojmë se sa përqindje të numrit n (numra të anëtarëve të bashkësisë bazë), përbën numri f_i (numri i anëtarëve të bashkësisë bazë, modaliteti i karakteristikës të së cilës është i barabartë me x_i).

$$p_i\% = \frac{f_i}{n} 100\,\%.$$

Në qoftë se karakteristika ka numër të madh modalitetesh (d.m.th. në qoftë se s është numër i madh), atëherë futen në përdorim intervalet me gjatësi të barabarta pa pika të përbashkëta:

$$[a_0, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), ..., [a_{k-1}, a_k).$$

Në rastin e parë bashkësia bazë ndahet në k nënbashkësi disjunkte, ashtu që në secilën nënbashkësi renditen elementet, modalitetet e karakteristikës (që janë dhënë numerikisht) u takojnë, sipas radhës, intervaleve $[a_0, a_1), [a_1, a_2), [a_2, a_3), ..., [a_{k-1}, a_k)$. Të shënojmë me:

$f_1 -$ numrin e anëtarëve të bashkësisë bazë, modaliteti i karakteristikës i takon intervalit $[a_0, a_1)$,
$f_2 -$ numrin e anëtarëve të bashkësisë bazë, modaliteti i karakteristikës i takon intervalit $[a_1, a_2)$,
$f_3 -$ numrin e anëtarëve të bashkësisë bazë, modaliteti i karakteristikës i takon intervalit $[a_2, a_3)$,
$f_k -$ numrin e anëtarëve të bashkësisë bazë, modaliteti i karakteristikës i takon intervalit $[a_3, a_4)$.

Numrat $f_1, f_2, ..., f_k$ gjithashtu quhen frekuencat. Numri $n = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_s$ është numri i elementeve të bashkësisë bazë. Për secilën frekuencë f_i mund të njehsojmë se sa përqind të numrit n (numra të anëtarëve të bashkësisë bazë), përbën numri f_i (numri i anëtarëve të bashkësisë bazë, modaliteti i karakteristikës të së cilës është i barabartë me x_i): $[a_{i-1}, a_i)$). :

$$p_i\% = \frac{f_i}{n} 100\,\%.$$

Për vargjet e rregulluara të të dhënave të këtilla formohen:

a) tabelat (tabela 3.2., tabelat 3.5. dhe 3.6, Teksti, faqe 21dhe 23),

b) diagramet me shtylla (me shirita) të përbërë nga drejtkëndëshat (shtyllat, shiritat) me gjerësi të barabarta, kurse gjatësia e të cilëve është e barabartë me f_i ose $p_i\% = \frac{f_i}{n} 100\,\%$ (figura 3.4, Teksti, faqe 25).

c) diagramet rrethore (qarkore) në të cilat frekuencave $f_1, f_2, f_3, \cdots, f_s$ u shoqërohen sektorët rrethorë, të cilëve u përgjigjen këndet qendrore:

$$\alpha_1 = \frac{f_1}{n} \cdot 360^\circ,\ \alpha_2 = \frac{f_2}{n} \cdot 360^\circ, \ldots, \alpha_s = \frac{f_s}{n} \cdot 360^\circ$$ (figurat 3.1. dhe 3.2., Teksti, faqe 24).

d) Në detyrat në të cilat krahasohen dy ose më shumë vargje të dhënash, formohen diagramet e dyfishta, gjegjësisht të shumëfishta (shembulli 3.7, Teksti, faqe 25.).

e) Gjithashtu shqyrtohen detyrat në të cilat, në bazë të diagrameve të porsaformuara, duhet të bëhet analiza e të dhënave.

Mbi këto detaje nuk u duhet treguar nxënësve, sepse nuk janë të parapara me programin lëndor. Qëllimi kryesor i shqyrtimeve paraprake ka qenë (siç është cekur më herët), që arsimtarëve t'u prezantohet skema sipas të cilës janë formuar shembujt në Tekst dhe në Përmbledhje. Kjo mund t'i shërbejë arsimtarit si bazë për formimin e detyrave të reja mbi një temë aktuale në klasë (marka e preferuar e automobilave, telefonave celularë, atleteve etj).

Në orët mësimore analizohen kryesisht tabelat dhe diagramet e formuara. Detyrat në të cilat në bazë të të dhënave të përftuara duhet të formojmë tabelën ose diagramin kërkojnë më shumë kohë dhe durim, prandaj detyrat e tilla nxënësit i punojnë në shtëpi.

Me ndihmën e arsimtarit nxënësit analizojnë të dhënat nga shembulli 3.1. (Teksti, faqe 22). Konstatohet se duke i përmendur numrat e nxënësve që në matematikë kanë marrë notën 1, 2, 3, 4 dhe 5 nuk jep ide të qartë mbi shpërndarjen e notave. Njëra nga mënyrat që të përftohet ideja e qartë mbi atë shpërndarje është formimi i tabelës 3.3. Në bazë të asaj tabele mund të shprehen në përqindje numrat e nxënësve që kanë marrë në matematikë notat 1, 2, 3, 4.

Mbas shembullit 3.1. duhet të analizohet një varg i çfarëdoshëm i të dhënave numerike duke mos u dhënë atyre të dhënave ndonjë domethënie konkrete. Në Teksti (fig. 21.) është dhënë vargu:

$$\underbrace{2,2,2,2}_{4\text{ herë}},\underbrace{4,4,4,4,4}_{5\text{herë}},\underbrace{7,7,7}_{3\text{ herë}},\underbrace{9,9,9,9,9,9,9,9}_{8\text{ herë}}.$$

Arsimtari sqaron mënyrën me të cilën janë formuar dy rendet e para të tabelës 3.1. dhe rikujton se si mund të njehsohet se sa përqind të numrit *n* e përbën numri f:

$$p\,\% = \frac{f}{n}100\,\%.$$

Nxënësit shprehin numrin e paraqitjeve të numrit 2 (numri 2 paraqitet 4 herë), si përqindje të numrit të përgjithshëm të kufizave të vargut (numri i përgjithshëm i kufizave të vargut është 20):

$$\frac{4}{\cancel{20}^{1}}\cdot\cancel{100}^{5}\,\% = 20\%.$$

Këtë proces duhet ta vazhdojmë me kufizat e tjera të vargut dhe të formohet rendi i tretë i tabelës 3.1.

Tani mund të shqyrtohet rasti i përgjithshëm (tabela 3.2., Teksti, faqe 21).

Një mangësi e madhe e tabelës 3.1. ilustrohet në shembullin nga Teksti (faqe 22) në të cilin konstatohet se një tabelë e tillë për vargun me 200 numra të përftuar, duke matur peshën e 200 nxënësve do të jetë e paqartë. Kështu mund të arsyetohet futja në përdorim e intervaleve me gjatësi të barabarta pa pika të përbashkëta dhe regjistrimin e kufizave të vargut të të dhënave që u përkasin intervaleve të caktuara. Ilustrimi i një veprimi të tillë është dhënë në shembullin 3.2. dhe 3.3. (Teksti, faqe 22 dhe 23). Procesi i përgjithshëm është ilustruar në tabelat 3.5. dhe 3.6.

Gjatë përpunimit të diagramit në shembullin 3.4 (Teksti, faqe 24), mund të kërkohet që nëpërmjet diagramit të paraqiten edhe përqindjet përkatëse.

Në lidhje me diagramin nga shembulli 3.6. mund të parashtrohen pyetjet e mëposhtme:

- Sa për qind e gjatësisë totale të rrugës është ndërtuar në janar (shkurt, mars, prill)?
- Në cilin muaj është ndërtuar pjesa më e madhe e rrugës dhe në cilin pjesa më e vogël?
- Si e sqaroni faktin se në mars dhe në prill janë ndërtuar pjesët më të mëdha të rrugës se në janar dhe shkurt? (Përgjigjja: kushtet klimatike).

Gjatë përpunimit të diagramit në shembullin 3.7. mund të parashtrohen këto pyetje:

- Sa çifte këpucësh dimërore (vjeshtore, pranverore) janë shitur në janar (në shkurt, në mars, në prill)?
- Në cilin muaj janë bërë më pak çifte këpucësh dimërore (vjeshtore, pranverore)?
- Si i sqaroni të dhënat e përftuara?

Pyetje të ngjashme mund të parashtrohen edhe në lidhje me diagramet nga shembujt 3.8. dhe 3.9.

Nxënësit mund të grumbullojnë vetëm ose në grupe të dhënat e caktuara dhe me to të formojnë tabelat ose diagramet.

Shembulli 1. Në tabelë është paraqitur orari i aktiviteteve që ka një nxënës, për shembull, të hënën.

aktiviteti	fjetja	shkolla	mësimi	TV	kompjuteri	shëtitja	të tjerat
koha	9 orë	6 orë	3 orë	2 orë	1 orë	1 orë	2 orë.

Çdo nxënës duhet të formojë orarin e aktiviteteve të tij dhe në bazë të tij të formojë tabelën dhe njërin prej diagrameve.

Shembulli 2. Çdo nxënësi në klasë i jepet detyrë që të grumbullojë të dhënat mbi numrin e fëmijëve në familjet nga mjedisi i tij (për shembull, në ndërtesën në të cilën banon) dhe regjistron:

- numrin e familjeve pa fëmijë;
- numrin e familjeve me një fëmijë;
- numrin e familjeve me dy fëmijë;
- numrin e familjeve me tre dhe më shumë fëmijë.

Në bazë të të dhënave të grumbulluara formon tabelën, diagramin rrethor dhe atë me shtylla. Mund të rregullohen të dhënat që i ofron çdo nxënës nga klasa dhe për to të formohet tabela ose diagrami.

Shembulli 3. Nxënësi përfton detyrën që të analizojë se sa shpesh në rrugët e qytetit, për shembull, të hënën prej 16^h - 17^h, mund të shihen këto marka automobilash:

- Mercedes, Reno, Audi, Golf dhe Shkodë.

Për secilën markë regjistron numrin e automobilave të asaj marke që ka shikuar ai. Në bazë të të dhënave të grumbulluara formon tabelën, diagramin rrethor dhe diagramin me shtyllë.

Shembulli 4. Nxënësi bën anketën në klasë, duke pyetur të tjerët se cili nga sportet e mëposhtme është më i preferuar:

- futbolli;
- basketbolli;
- shahu;
- tenisi;
- automobilizmi.

Në bazë të të dhënave të përftuara formon tabelën dhe diagramin rrethor ose atë me shkallë.

Shembulli 5. Nxënësi bën anketën, duke pyetur të njohurit dhe nxënësit nga klasa e tij, se cila markë e telefonave celularë është më e preferuara.

Në bazë të të dhënave të përftuara formon tabelën dhe diagramin rrethor ose diagramin me shkallë.

Shembulli 6. Nxënësi bën anketën në klasë mbi lëndën e preferuar dhe formon tabelën e diagramit.

Shembulli 7. Nga arsimtari mund të përftohen të dhënat mbi suksesin e nxënësve në lëndët e caktuara dhe të formohen tabelat dhe diagramet.

Struktura e detyrave në Përmbledhje

Detyrat, në të cilat, në bazë të të dhënave duhet të formohen diagramet rrethore:

3.1, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10 dhe 3.11.

Zgjidhjet e këtyre detyrave në Përmbledhje janë dhënë në formën e diagrameve rrethore në të cilat janë shënuar madhësitë e këndeve qendrore të sektorëve rrethorë. Për secilën prej atyre detyrave duhet të vizatohet diagrami rrethor në të cilin, në vendet përkatëse do të shënohen përqindjet. Pastaj për secilën prej atyre detyrave mund të formohet tabela e llojit 3.2. (Teksti, faqe 21.) ose diagrami me shtylla.

Detyrat, në të cilat, në bazë të të dhënave të dhëna duhet të formohen diagramet me shtylla (me shirita):

Detyra 3.13 dhe 3.16.

Detyrat në të cilat në bazë të diagrameve të dhëna duhet të bëhet analiza e të dhënave:

3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.12, 3.14 dhe 3.15.

1. ÇFARË ËSHTË FUNKSIONI?

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi /ja:

- përvetëson se disa madhësi gjithmonë kanë vlerën e njëjtë, kurse disa madhësi të tjera gjatë një kohe, gjegjësisht procesi të caktuar, ndryshojnë vlerat e tyre;
- përvetëson se madhësitë e grupit të parë quhen konstante, kurse ato të grupit të dytë ndryshore;
- di shembuj madhësish konstante dhe ndryshuese;
- përvetëson karakteristikat e përbashkëta të shembujve konkretë në të cilat shqyrtohet varësia funksionale e dy madhësive;
- përvetëson nocionin e funksionit dhe bashkësinë e përcaktimit të funksionit;
- përvetëson nocionet e ndryshores së varur dhe ndryshores së pavarur;
- di se funksioni mund të jepet nëpërmjet tabelës, formulës dhe grafikut;
- di të përcaktojë bashkësinë e përcaktimit të disa funksioneve të thjeshta të dhëna me anë të formulës;
- di se për vlerën e dhënë të ndryshores së pavarur përcakton vlerën përkatëse të funksionit dhe anasjelltas, për vlerën e dhënë të funksionit përcakton vlerat përkatëse të ndryshores së pavarur;
- përvetëson nocionin e grafikut të funksionit;
- është në gjendje që në shembuj konkretë, në bazë të grafikut të funksionit të nxjerrë disa përfundime të thjeshta mbi procesin që e përshkruan ai grafik.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Kjo temë është hapi i parë në hulumtimin sistematik të nocionit të funksionit, me të cilin nxënësit do të takohen shpeshherë në të gjitha nivelet e arsimimit matematik (dhe jo veç matematik). Nxënësit që nuk e përvetësojnë këtë nocion, nuk mund të përcjellin në mënyrë kualitative pjesën më të madhe të përmbajtjeve matematike të parapara në shkollën e mesme.

Në pjesën hyrëse duhet të përmenden shembuj të madhësive konstante dhe atyre ndryshuese.

Sipërfaqja e drejtkëndëshit është madhësi ndryshuese. Disa drejtkëndësha kanë sipërfaqen 5 cm^2 , kurse disa të tjerë 120 km^2 etj. Edhe shuma e këndeve të brendshme të shumëkëndëshit është madhësi ndryshuese. Për disa shumëkëndësha, ajo shumë është e barabartë me 180°, për disa të tjerë 360° etj. Çmimi i shërbimeve hotelierike në vendet bregdetare është gjithashtu madhësi ndryshuese. Në verë, për shembull, çmimi i atyre shërbimeve është më i madh sesa në dimër. Nga nxënësit duhet të kërkohet që edhe ata të përmendin disa madhësi konstante dhe disa madhësi ndryshuese.

Kur flasim mbi madhësitë ndryshuese, duhet të kemi parasysh se deri te ndryshimi i vlerave të tyre vjen nën ndikimin e disa faktorëve. Me fjalë të tjera, madhësitë ndryshuese nuk mund të shqyrtohen në mënyrë të izoluar, siç është fjala mbi madhësitë konstante, por në varësinë reciproke me disa madhësi të tjera ndryshuese. Sipërfaqja e drejtkëndëshit dhe gjatësitë e brinjëve të tij janë madhësi ndryshuese, varësia reciproke e të cilave shprehet me anë të formulës S = ab. Varësia reciproke e shumës së këndeve të brendshme dhe numrit të brinjëve të shumëkëndëshit shprehet me anë të formulës $S_n = (n\text{-}2) \cdot 180^\circ$, ku n është numri i brinjëve të shumëkëndëshit. Çmimi i shërbimeve në restorantet e bregdetit varet nga stina e vitit, kushtet klimatike, numri i turistëve, fuqia blerëse e qytetarëve etj.

Para përkufizimit të nocionit të funksionit, në Tekst janë dhënë disa shembuj të çifteve të madhësive ndryshuese, varësia reciproke e të cilave është e tillë që çdo vlere të një ndryshoreje i përgjigjet saktësisht një vlerë e ndryshores tjetër (shembujt 1.1, 1.3 dhe 1.5, Teksti, faqe. 28 -29). Kur në tabelë të përpunohet shembulli 1.1, nxënësit plotësojnë tabelën 1 në fletën mësimore. Në të njëjtën mënyrë veprohet gjatë përpunimit të shembujve 1.3 dhe 1.5, gjegjësisht gjatë plotësimit të tabelave përkatëse (tabelat 2 dhe 3 në fletën mësimore). Qëllimi i këtyre shembujve është që nxënësit të përgatiten për përvetësimin, jo vetëm të nocionit të funksionit d.m.th. formës së caktuar të varësisë reciproke të dy madhësive, por edhe karakteristikës së tyre të rëndësishme; bashkësinë e përcaktimit.

FLETA MËSIMORE NR. 1.

Plotëso tabelat 1, 2 dhe 3.

gjatësia e brinjës së katrorit a	a	$2cm$	$4cm$	$6cm$
sipërfaqja e katrorit $S(a) = a^2$	$S(a) = a^2$	cm^2	cm^2	cm^2

Tabela 1

numri i brinjëve të shumëkëndëshit	n	4	6	7
numri i diagonaleve të tij	$D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$			

Tabela 2

koha	t	2^h	4^h	5^h
gjatësia e rrugës së kaluar	$s(t) = 60t$	km	km	km

Tabela 3

Ku do të gabosh, nëse do të plotësosh tabelat e mëposhtme:

gjatësia e brinjës së katrorit a	a	$-2cm$	$-4cm$	$-6cm$
sipërfaqja e katrorit $S(a) = a^2$	$S(a) = a^2$	cm^2	cm^2	cm^2

Tabela 4

numri i brinjëve të shumëkëndëshit	n	2	$\frac{5}{7}$	-6
numri i diagonaleve të tij	$D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$			

Tabela 5

koha	t	-3^h	-5^h	-7^h
gjatësia e rrugës së kaluar	$s(t) = 60t$	km	km	km

Tabela 6

Nxënësit duhet të nxiten që për:

a) sipërfaqen e katrorit të flasin si mbi funksionin e brinjës së tij;

b) numrin e diagonaleve të shumëkëndëshit të flasin si mbi funksionin e numrit të brinjëve të tij;

c) gjatësinë e rrugës së kaluar të flasin si mbi funksionin e kohës t.

Në secilin prej këtyre shembujve nxënësit duhet të precizojnë se cilën ndryshore e quajmë ndryshore të pavarur, kurse cilën ndryshore e quajnë ndryshore të varur dhe të japin arsyet pse ato quhen ashtu.

Siç është përmendur më herët, qëllimi i këtyre shembujve është, përvesh tjerash, që nxënësit të përgatiten edhe për përvetësimin e nocionit të bashkësisë së përcaktimit të funksionit. Prandaj, mbas që nxënësit të mendojnë mbi gabimin eventual duke plotësuar tabelat 4, 5 dhe 6, duhet të parashtrohen pyetjet e mëposhtme (ose pyetje të ngjashme):

- pse plotësimi i tabelës 4 është absurde, edhe pse për shembull për a = -2cm, duke zbatuar formulën $S(a) = a^2$, përftojmë $S(a) = (-2)^2 cm^2 = 4cm^2$?

Përgjigjja: Sepse gjatësia e segmentit është numër pozitiv. Prandaj shprehja a = - 2cm nuk ka kuptim.

- Përse plotësimi i tabelës 5 është absurde, edhe pse, për shembull, për $n = 2$, duke zbatuar formulën

$D(n) = \frac{n(n-3)}{2}$ përftojmë $D(2) = \frac{2(2-3)}{2} = -1$? Si mund ta lexojmë shprehjen e fundit?

Përgjigjja: Shprehjen e fundit mund ta lexojmë kështu:

" Shumëkëndëshi me dy brinjë ka (-1) diagonale"

Fjalia e tillë është absurde, sepse numri i diagonaleve të shumëkëndëshit është numër natyror. Problemi manifestohet në faktin se nuk ekziston shumëkëndëshi, numri i brinjëve të të cilit është $n = 2$

Përse është absurd, plotësimi i tabelës 6 edhe pse për shembull, për $t = -3^h$ duke zbatuar formulën s(t) = 60 t, përftojmë S(-3) = (-3 · 60)km = -180km? Si mund ta lexojmë shprehjen e fundit?

Përgjigjja: Shprehjen e fundit mund ta lexojmë kështu:

" Treni që lëviz me shpejtësi 60 km/h, për $t = -3^h$ kalon rrugën me gjatësi -180 km".

Fjalia e tillë është absurde, sepse numrat matës të kohës dhe gjatësia e rrugës janë numra pozitivë.

Mbas përpunimit të fletës mësimore numër 1 duhet të kryhet analiza, qëllimi i të cilës është të vihen re vetitë e përbashkëta të varësisë reciproke të madhësive në shembujt 1.1, 1.3 dhe 1.5 (Teksti, faqe 30). Ato veti përkufizohen gjatë përkufizimit të funksionit.

Nxënësit duhet të fitojnë shprehinë që në mënyrë të lirë të shërbehen me termat "ndryshorja e pavarur ", "ndryshorja e varur", "argument", "funksion", "bashkësi e përcaktimit të funksionit", "varësi funksionale", etj. Nxënësve duhet t'u tërhiqet vëmendja se termi funksion përdoret në dy kontekste. Në njërën anë, mbi funksionin flitet si mbi rregullën, sipas të cilës çdo vlere të ndryshores së pavarur, i përgjigjet saktësisht një vlerë e ndryshores së varur, kurse në anën tjetër, për ndryshoren e varur y shpeshherë thuhet se është funksion i ndryshores së pavarur x. Në këtë kontekst flitet mbi vlerat pozitive dhe negative të funksionit, mbi intervalet në të cilat funksioni merr vlera pozitive, gjegjësisht vlera negative, mbi intervalet në të cilat funksioni rritet, gjegjësisht zbritet, etj.

Përvetësimit të nocionit të funksionit i kontribuojnë detyrat 1.1 -1.10 (Përmbledhja, faqe 17).

Nxënësve duhet t'u tërhiqet vëmendja se funksioni është **një lloj i caktuar i varësisë** i një ndryshoreje nga ndryshorja tjetër dhe se çdo varësi reciproke e dy ndryshoreve nuk është doemos funksion. Kur themi **një lloj i caktuar i varësisë** kemi parasysh varësinë reciproke të dy ndryshoreve që realizohet ashtu që çdo vlere të një ndryshoreje i përgjigjet **saktësisht një vlerë** e ndryshores tjetër.

Në çfarë mënyre mund të mësojnë nxënësit se varësia reciproke e ndryshoreve x dhe y nuk është doemos funksion?

Një qëllim i tillë mund të realizohet me anë të fletës mësimore të mëposhtme:

FLETA MËSIMORE NR. 2.

Funksioni $f: D \to R$ **është çdo rregull** f **sipas të cilës çdo numri** $x \in D$ **i shoqërohet saktësisht një numër** $y \in R$.

▲**1.** Le të jetë rregulla f e tillë që numrit pozitiv real x i shoqërohet ai numër real y, për të cilin vlejnë $y^2 = x$. Plotëso tabelën 1.

Tabela 1

x	4	9	16
$y^2 = x$	2 dhe –2		

A është rregulla f funksion në bashkësinë $D = \{4, 9, 6\}$?
Përgjigjja: Po, jo (rretho).
Sqaro përgjigjen: _____
_____
_____
_____▲

▲**2.** Le të jetë rregulla f e tillë që numrit real natyror x i shoqërohen të gjithë numrat natyrorë më të vegjël se x.

Cilat bashkësi, me anë të rregullës f, u shoqërohen numrave 3, 4 dhe 5 (plotëso vendet e zbrazëta):

$3 \to \{1, 2\}$ $\quad 4 \to \{\ ,\ ,\ \}$; $\quad 5 \to \{\ ,\ ,\ ,\ \}$.

A është rregulla f funksion në bashkësinë e numrave natyrorë?
Përgjigjja: Po, jo (rretho).
Sqaro përgjigjen: _____
_____
_____
_____▲

Përfundimi: Rregulla f sipas të cilës ekziston së paku një vlerë e ndryshores x, të cilës sipas asaj rregulle i shoqërohen dy ose më shumë vlera të ndryshores y **nuk është funksion**.

▲**3.** Le të jetë rregulla f e tillë që numrit real natyror x i shoqërohet numri natyror y i barabartë me mbetjen gjatë pjesëtimit të numrit x me numrin 3.

Plotëso tabelën:

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y	0	1	2						

A është rregulla f funksion në bashkësinë $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$?
Përgjigjja: Po, jo (rretho).
Sqaro përgjigjen: _____
_____
_____
_____▲

Përfundimi: Përkufizimi i funksionit lejon mundësinë që vlerave të ndryshme të ndryshores së pavarur x t'u shoqërohen vlerat e barabarta të ndryshores y.

Duhet të përpunohen disa shembuj të funksioneve të dhëna me anë të:
- tabelës (detyrat në Përmbledhje 1.12 – 1.14, faqe 17, 18).
-formulës (detyrat në Përmbledhje 1.15 – 1.22, faqe 18, 19).
-grafikisht.

Në detyrat 1.15 - 1.22 (Përmbledhja) të kushtuara funksioneve të dhëna me anë të formulës, kryesisht kërkohet që për vlerat e dhëna të ndryshores së pavarur të përcaktohen vlerat përkatëse të ndryshores së varur. Është me rëndësi të shqyrtohen edhe disa shembuj në të cilët në bazë të vlerës së dhënë të funksionit duhet të përcaktohen vlerat përkatëse të ndryshores së pavarur. Të përmendim se nxënësit e klasës së nëntë, detyra të tilla mund t'i zgjidhin vetëm, në qoftë se ata sillen në ekuacione lineare me një të panjohur ose në ekuacione kuadratike $x^2 = a$.

Të japim dy shembuj.

Shembulli 1. Funksioni është dhënë me anë të formulës $y = 3x - 6$. Të përcaktohen vlerat e ndryshores së pavarur për të cilën vlera e funksionit është e barabartë me $y = 9,\ y = 0,\ y = 2$ dhe $y = 15$.

Shembulli 1. Funksioni është dhënë me anë të formulës $y = x^2 - 6$. Të përcaktohen vlerat e ndryshores së pavarur për të cilën vlera e funksionit është e barabartë me $y = 3,\ y = 10,\ y = 19$ dhe $y = 30$.

Çdo nxënës duhet të mësojë se për funksionin e dhënë me anë të formulës duhet të precizohet cila është bashkësia e përcaktimit të tij. Në qoftë se te funksioni i dhënë me anë të formulës nuk është shënuar se cila bashkësi është bashkësia e përcaktimit të tij, atëherë mendohet se bashkësia e përcaktimit të atij funksioni është bashkësia që përmban të gjithë numrat realë, për të cilët formula përkufizuese e funksionit ka kuptim. Ky problem është shqyrtuar në përmbledhje në detyrën 1.20.

Për cilat funksione, nxënësit e klasës së nëntë mund të përcaktojnë bashkësinë e përcaktimit?

Ata nxënës duhet të dinë se pjesëtimi me zero nuk është i lejueshëm (nuk ka kuptim). Ata gjithashtu duhet të dinë se rrënja katrore në bashkësinë e numrave realë përkufizohet vetëm për numra pozitivë. Ato dituri të arritura mund të jenë përmbajtje në detyrat, në të cilat duhet të përcaktohet bashkësia e përcaktimit të funksioneve të dhëna me anë të formulës.

Të japim një propozim se si mund të realizohet një qëllim i tillë.

Arsimtari: Siç e dini, pjesëtimi me zero nuk është i lejueshëm ose siç thuhet ndryshe, pjesëtimi me zero nuk ka kuptim. Të rikujtojmë se cila është arsyeja e një fakti të tillë.

Herësi i dy numrave është numri, që duke u shumëzuar me pjesëtuesin, jep të pjesëtueshmin. Pra $\frac{a}{b} = c$, ku c është numri me vetinë $a = bc$. Sikur pjesëtimi p.sh. i numrit 5 me numrin 0 të ishte veprim i mundshëm, cili do të ishte përfundimi?

Nxënësit: Kjo hipotezë domethënë se ekziston numri real c i tillë që $\frac{5}{0} = c$, ku c është numri që gjatë shumëzimit me pjesëtuesin jep të pjesëtueshmin, d.m.th. $5 = 0 \cdot c$. Kështu do të përftohej barazimi i pasaktë $5 = 0$.

Arsimtari: Çfarë nënkupton të gjendet bashkësia e përcaktimit të funksionit $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$?

Nxënësit: Kjo domethënë se duhet të përcaktohen të gjitha vlerat e ndryshores x për të cilat shprehja $\frac{x-2}{x+2}$ ka kuptim.

Arsimtari: Më lehtë do të përcaktojmë vlerat e ndryshores x për të cilën ajo shprehje nuk ka kuptim. Cilët janë ata numra? Rikujtojmë se pjesëtimi me zero nuk ka kuptim.

Nxënësit: Ata janë numrat x për të cilët $x+2=0$. Duke zgjidhur ekuacionin e fundit, përftojmë $x = -2$. Prandaj, shprehja $\frac{x-2}{x+2}$ nuk ka kuptim për $x = -2$.

Arsimtari: Cila është bashkësia e përcaktimit të funksionit të dhënë?

Nxënësit: Bashkësia e përcaktimit të funksionit të dhënë është bashkësia e të gjithë numrave realë, përveç numrit –2. (Arsimtari shkruan në tabelë $D(f) = \{x \in R : x \neq -2\}$).

Arsimtari: Të shqyrtojmë edhe një shembull. Para kësaj të rikujtojmë se si përkufizohet rrënja katrore e numrit real pozitiv.

(Pas një ose më shumë përpjekjesh dhe me ndihmën e arsimtarit, nxënësit mbërrijnë deri te përgjigjja.)

Nxënësit: Rrënja e **numrit pozitiv a,** që shënohet $\sqrt{a}$, është zgjidhja pozitive e ekuacionit $x^2 = a$:

$$\sqrt{a} > 0 \text{ dhe } \left(\sqrt{a}\right)^2 = a.$$

Arsimtari: Përse, në mënyrë të njëjtë, nuk mund të flasim mbi numrin $\sqrt{-1}$?

Nxënësit: Sepse katrori i atij numri duhet të jetë i barabartë me -1:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1.$$

Kjo nuk është e mundshme, sepse në anën e majtë të barazimit të fundit ndodhet numri pozitiv (katrori i çdo numri të ndryshëm nga zero është numër pozitiv), kurse në anën e djathtë ndodhet numri negativ -1.

Arsimtari: Çfarë domethënë të gjendet bashkësia e përcaktimit të funksionit $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Nxënësit: Kjo domethënë se duhet të gjejmë të gjitha vlerat e ndryshores x për të cilat shprehja $\sqrt{x^2 - 1}$ ka kuptim. Kjo shprehje ka kuptim vetëm, në qoftë se madhësia nën rrënjë është numër pozitiv ose i barabartë me zero:

$$x^2 - 1 \geq 0.$$

Arsimtari u ndihmon nxënësve që të zgjidhin mosbarazimin e përftuar, duke u rikujtuar se $\sqrt{x^2} = |x|$:

$$x^2 - 1 \geq 0,$$
$$x^2 \geq 1,$$
$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{1},$$
$$|x| \geq 1.$$

Nxënësit dinë se si në boshtin e koordinatave skicohet bashkësia e pikave, koordinatat e të cilave plotësojnë kushtin $|x| \geq 1$ dhe përfundojmë se bashkësia e përcaktimit të funksionit të dhënë është bashkësia:

$$D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty).$$

Hap tjetër i rëndësishëm në hulumtimin e funksionit është **grafiku i funksionit**. Qëllimi themelor është përvetësimi i grafikut të funksionit linear (mbi çfarë do të flasim më vonë në detaje). Në Tekst në mënyrë ekskluzive, me qëllim ilustrimi janë shqyrtuar vetëm dy grafikë të funksioneve jolineare. Në pyetje janë grafiku i funksionit kuadratik $y = x^2$ dhe grafiku i funksionit të përpjesëtueshmërisë së zhdrejtë $y = \frac{k}{x}$. Ne mendojmë se me kaq duhet të përfundohen shqyrtimet në lidhje me vizatimin e grafikëve të funksioneve jolineare të dhëna me anë të formulës. Situata është tërësisht e ndryshme kur janë në pyetje funksionet e dhëna grafikisht. Meqenëse nuk mund të studiohen grafikët në mënyrë të mirëfilltë, rëndësinë e tyre mund t'ua tregojmë nxënësve duke përpunuar disa funksione të dhëna grafikisht.

Nxënësve duhet t'u tërhiqet vëmendja për ndryshimin ndërmjet grafikut të funksionit dhe funksionit të dhënë grafikisht. Grafiku i funksionit është lakore e përftuar duke analizuar formulën (kryesisht duke zbatuar llogarinë diferenciale) me të cilën është përkufizuar ai funksion. Kur flasim mbi funksionet e dhëna grafikisht kemi parasysh funksionet, të cilat nuk jemi në gjendje t'i përshkruajmë me anë të formulës, me fjalë ose në një mënyrë tjetër. Në praktikë, më shpesh, fjala është mbi funksionet për të cilat në mënyrë eksperimentale gjendet vargu i vlerave përkatëse të ndryshoreve x dhe y:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n).$$

Duke tërhequr lakoren që kalon nëpër pikat, koordinatat e të cilave janë çiftet e atyre vlerave, përftojmë lakoren me anë të së cilës analizojmë procesin që e karakterizon varësia reciproke e ndryshoreve x dhe y.

Propozojmë që në tabelë të përpunohet në detaje detyra e mëposhtme:

1. Funksioni $y = f(x)$ është dhënë grafikisht dhe grafiku i tij është dhënë në figurën 29.

a) Përcaktoni vlerat e funksionit për vlerat e mëposhtme të

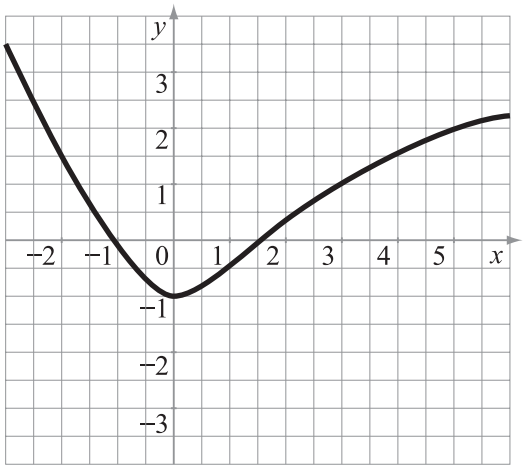


figura 29.

ndryshores së pavarur:

$$x = 4,\ x = 2,\ 5;\ x = -3.$$

b) Përcaktoni vlerat e ndryshores së pavarur për të cilat vlerat përkatëse të funksionit janë të barabarta me $y = 1,\ y = 2,\ y = -1,\ y = 4.$

Nxënësit duhet të përpunojnë në mënyrë të pavarur detyrat e dhëna në fletën mësimore.

FLETA MËSIMORE NR. 3.

1. Funksioni $y = f(x)$ është dhënë grafikisht në figurën 30.

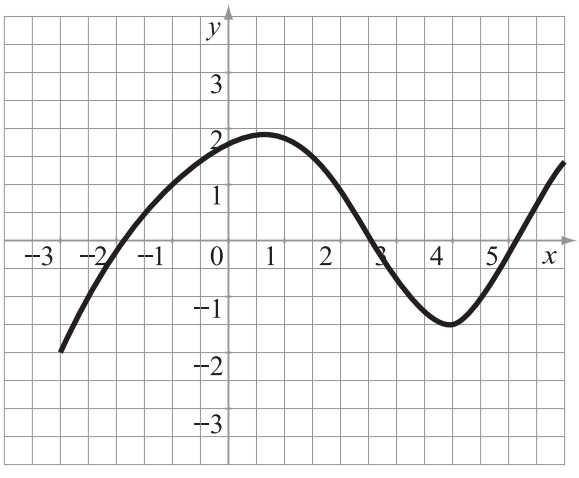


figura 30.

a) Përcaktoni vlerat e funksionit për vlerat e mëposhtme të ndryshores së pavarur:

$$x = -2,\ x = 2,\ x = 4,\ x = 5.$$

b) Përcaktoni vlerat e ndryshores së pavarur për të cilat vlerat përkatëse të funksionit janë të barabarta me $y = 1,\ y = -2,\ y = 3,\ y = 0.$

a) _____

b) _____

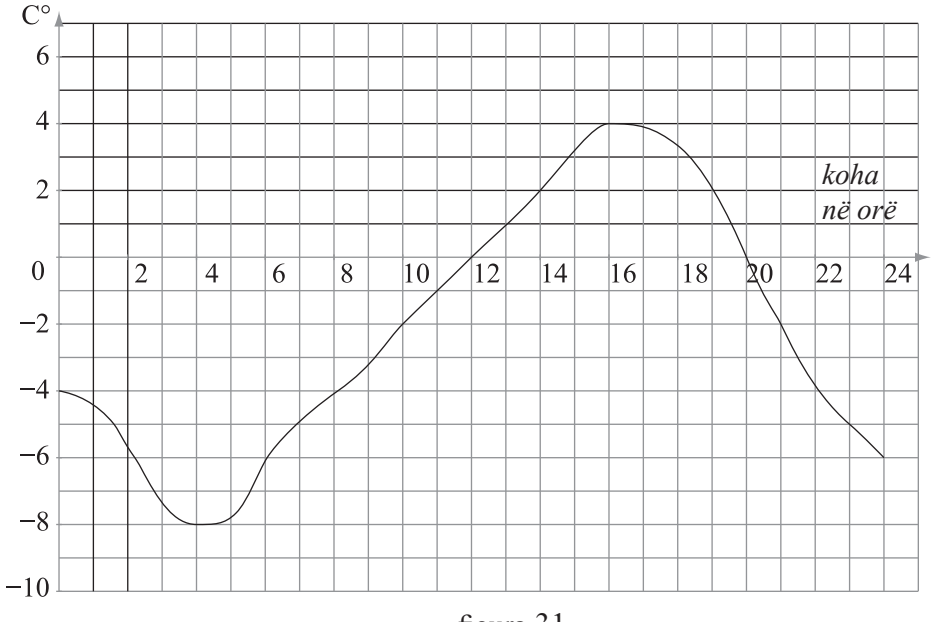


figura 31.

2. Në figurën 31 është paraqitur grafiku i ndryshimit të temperaturës së ajrit gjatë një dite. Në bazë të grafikut, përgjigju në këto pyetje:

a) Në ç'orë temperatura ka qenë 4°, 2°, 0°, -6° ? _____

b) Sa ka qenë temperatura në 4^h, 8^h, 12^h, 21^h dhe 23^h ? _____

c) Në cilat intervale temperatura ka qenë më e madhe se 0^0 ? _____

d) Në cilat intervale temperatura ka qenë më e vogël se 0^0 ? _____

e) Në ç'orë temperatura ka qenë maksimale dhe kur minimale? _____

f) Në cilat intervale temperatura është rritur dhe në cilat ajo është zbritur?

_____

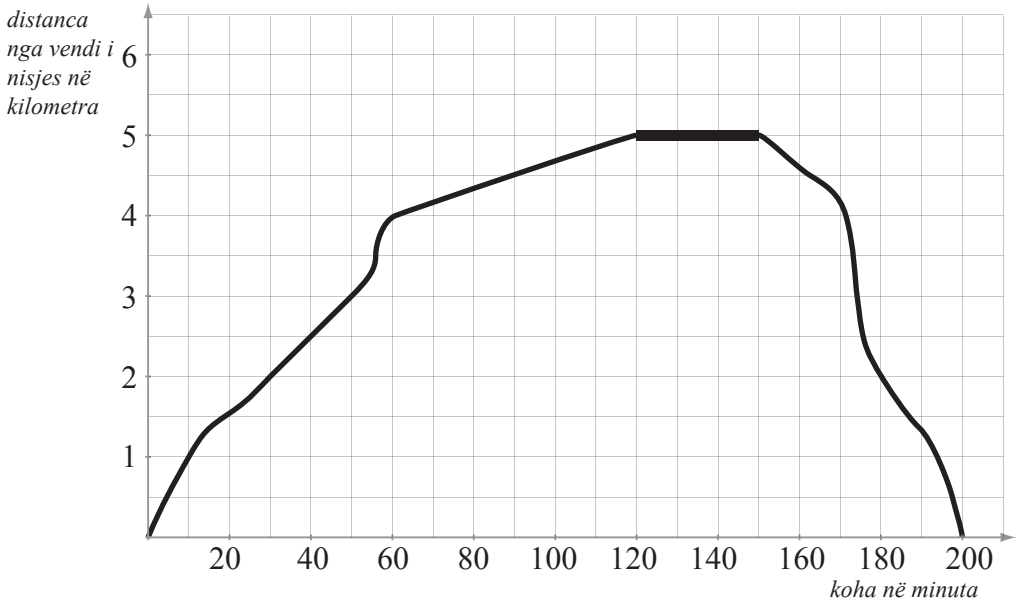


figura 32.

3. Grupi i turistëve është nisur për të vizituar një monument i cili ndodhet në majën e një mali të afërm. Distanca e grupit nga vendi ku ka filluar ngjitja është funksion i kohës *t* dhe grafiku i atij funksioni është paraqitur në figurën 32. Përgjigju në pyetjet e mëposhtme:

a) Sa kohë ka qëndruar grupi në majë të malit? _____

b) Për sa kohë e ka kaluar grupi kilometrin e parë duke u ngjitur dhe për sa kohë, duke u zbritur?

_____

c) Sa kilometra ka kaluar grupi për gjysmë orën e parë? _____

d) Sa kohë i është dashur grupit ashtu që gjatë kthimit të ndodhet në distancën 2 *km* nga vendi i nisjes?

2. FUNKSIONI I PËRPJESËTUESHMËRISË SË DREJTË
3. FUNKSIONI I PËRPJESËTUESHMËRISË SË ZHDREJTË

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përsërit nocionet e madhësive në përpjesëtueshmëri të drejtë dhe të zhdrejtë;
- përvetëson se është fjala mbi varësinë funksionale të dy madhësive;
- përvetëson formulat $y = kx$ dhe $y = \frac{k}{x}$ me të cilat shprehet varësia funksionale e madhësive në përpjesëtueshmëri të drejtë dhe të zhdrejtë;
- përvetëson emërtimin e funksionit të përpjesëtueshmërisë së drejtë për funksionin $y = kx$, gjegjësisht funksionin e përpjesëtueshmërisë së zhdrejtë për funksionin $y = \frac{k}{x}$;
- në mënyrë të suksesshme i zgjidh detyrat, të cilat kryesisht sillen në zbatimin e drejtpërdrejtë të formulave $y = kx$ dhe $y = \frac{k}{x}$;
- përvetëson grafikët e funksioneve $y = kx$ dhe $y = \frac{k}{x}$.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Nxënësit në klasën VIII kanë shqyrtuar dy lloje varësish funksionale, përpjesëtueshmërinë e drejtë dhe të zhdrejtë. Hulumtimi i atyre varësive kryesisht është sjellë në zgjidhjen e detyrave duke zbatuar përpjesëtimet. Meqenëse nxënësit vetëm tani takohen me nocionin e funksionit, në klasën VIII nuk kemi përcaktuar formulat me anë të cilave shprehen varësitë reciproke të atyre madhësive. Atëherë në vend të termit funksion d.m.th. të vlerave të ndryshores së varur dhe të pavarur kemi përdorur termin çiftet e vlerave përkatëse. Pra, qëllimi kryesor është që përpjesëtueshmëria e drejtë dhe e zhdrejtë të shprehen sipas formulës dhe të përvetësohen grafikët e atyre funksioneve. Detyrat u janë kushtuar kryesisht zbatimit të formulave $y = kx$ dhe $y = \frac{k}{x}$ në situata të ndryshme si dhe vizatimit të grafikëve të funksioneve të dhëna në ato formula. Doemos duhen përpunuar disa detyra të cilat nxënësit në klasën VIII i kanë zgjidhur me ndihmën e përpjesëtueshmërisë. Këtu detyrat e tilla duhet të zgjidhen duke zbatuar vetitë e funksioneve të përpjesëtueshmërisë së drejtë dhe të zhdrejtë.

4. FUNKSIONI LINEAR

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- në shembuj konkretë identifikon varësinë reciproke të dy madhësive ndryshuese *x* dhe *y* që shprehet me anë të formulës $y = kx + n$;
- në bazë të atyre shembujve përvetëson nocionin e funksionit linear;
- në bazë të shembujve konkretë përvetëson se grafiku i funksionit linear është drejtëz;
- mëson të përcaktojë koordinatat e pikave në të cilat grafiku i funksionit linear i pret boshtet e koordinatave;
- përvetëson se pika, në të cilën grafiku i funksionit linear e pret boshtin *x,* quhet zeroja e funksionit;
- di të kontrollojë nëse pika e dhënë i takon grafikut të funksionit të dhënë linear;
- përcakton vlerat e parametrave në një formulë, me të cilën është dhënë funksioni linear, ashtu që grafiku i tij të përmbajë pikat e dhëna;
- njehson sipërfaqet e trekëndëshave dhe katërkëndëshave të formuar nga grafikët e funksioneve lineare dhe boshteve të koordinatave.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Funksioni linear është funksion i parë, të cilin nxënësit do ta analizojnë në detaje. Kur flasim mbi këtë kemi parasysh kërkesat standarde që parashtrohen gjatë zgjidhjes së detyrave, në të cilat në fillim duhet të analizohet rrjedha dhe shenja e funksionit të dhënë me anë të formulës (kryesisht duke zbatuar llogarinë diferenciale), pastaj në bazë të rrjedhës dhe shenjës të vizatohet grafiku i tij. Vërtet, përpunimi i kësaj teme, për shkak të mungesës së aparatit matematik, kërkon që renditja e veprimeve të jetë e anasjelltë. Nuk vërtetohet se grafiku i funksionit është drejtëz, por ky pohim përvetësohet në bazë të shembujve konkretë, pastaj duke shfrytëzuar atë model gjeometrik, hulumtohen vetitë e rëndësishme të funksionit linear dhe u jepet domethënie gjeometrike.

Futjes në përdorim të nocionit të funksionit linear në Tekst i paraprijnë dy shembuj, në të cilët varësia reciproke e madhësive *x* dhe *y* shprehet me anë të formulës $y = kx + n.$ Të japim edhe dy shembuj të tillë, të cilët së bashku me detyrën 4.10 (Përmbledhja, faqe 24) nxënësit duhet t'i përpunojnë në mënyrë të pavarur.

Shembulli 3. Marku ka në xhepin e majtë 20 €, kurse në xhepin e djathtë disa monedha nga 5€. Shëno me *x* numrin e monedhave nga 5€, kurse me *y* sasinë e përgjithshme të të hollave që ka Marku, pastaj shënoje formulën me të cilën shprehet varësia reciproke e ndryshoreve *x* dhe *y*.

Zgjidhje: $y = 5x + 20.$

Shembulli 4. Një nxënës ka blerë disa fletore dhe dy lapsa. Një fletore kushton 1,20 €, kurse një laps 0,50 €. Shëno me *x* numrin e fletoreve të blera, kurse me *y* sasinë e përgjithshme që e ka shpenzuar nxënësi gjatë tregtisë, pastaj shënoje formulën me të cilën shprehet varësia reciproke e ndryshoreve *x* dhe *y*.

Zgjidhje: $y = 1,2x + 1.$

Mbas këtyre shembujve duhet të përkufizohet nocioni i funksionit linear.

Për arsyet që janë përmendur në fillim, kujdes i veçantë gjatë përpunimit të kësaj teme duhet t'i kushtohet grafikut të funksionit linear. Siç është theksuar më herët, nuk vërtetohet pohimi se grafiku i funksionit linear është drejtëz . Në bazë të tabelës 4.1 (Teksti, faqe 44) nxënësit vizatojnë pikat, koordinatat e të cilave janë $(-4,5)$, $(-2,2)$, $(0,1)$, $(2,4)$ dhe $(4,7)$. Pikat e tjera të dhëna në tabelë nuk duhet të vizatohen, mirëpo duhet të përmenden gjatë komentimit të figurave 4.2 e 4.3. Arsimtari kërkon që nxënësit të vendosin vizoren, ashtu që ajo të bëjë lidhjen e dy pikave të çfarëdoshme të ndërtuara. Nxënësit arrijnë te përfundimi se vizorja i prek edhe pikat e tjera. Arsimtari komenton figurat 4.2. dhe 4.3., të cilat përforcojnë përfundimin se grafiku i funksionit $y = 1,5x + 1$ është drejtëz. Në tabelë shënohet përfundimi i përgjithshëm:

Grafiku i funksionit linear është drejtëz.

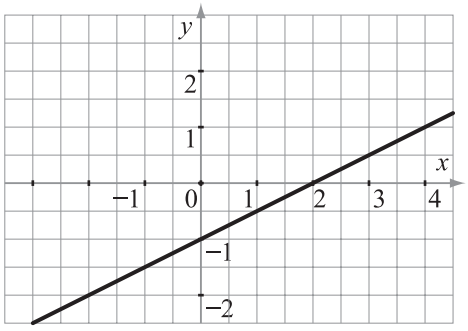
Arsimtari rikujton se nëpër dy pika të dhëna kalon saktësisht një drejtëz, prandaj për ndërtimin e grafikut të funksionit linear mjafton të ndërtohen dy pika të tij.

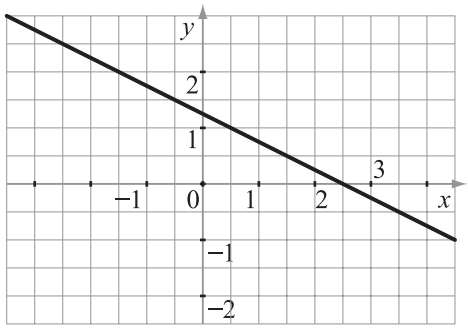
Nxënësit vizatojnë grafikun e funksionit $y = \frac{1}{4}x - 1$ duke përcaktuar dy pika të tij (shembulli 4.5, Teksti, faqe 45.).

Nxënësve mund t'u duket interesante edhe detyra e mëposhtme, e cila për shkak të figurave, duhet t'u formulohet në fletën mësimore.

FLETA MËSIMORE NR. 4

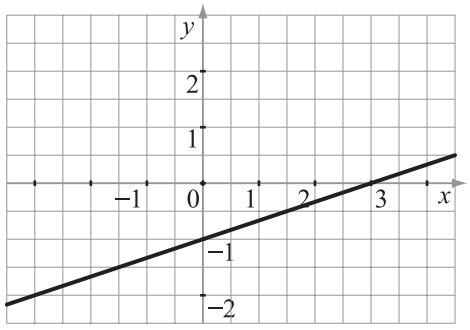
a)

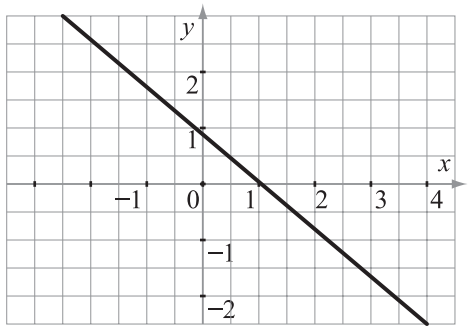




b)

c)





d)

figura 33.

• Cila nga drejtëzat e paraqitura në figurat 33 a), b), c) dhe *d*) është grafiku i funksionit $y = \frac{1}{3}x - 1$?

- Të sqarohet përse tri nga katër drejtëzat e dhëna nuk janë grafikë të funksionit të dhënë.
- Si keni ardhur te përfundimi se drejtëza e dhënë është grafik i funksionit të dhënë.

figura *a*) _____

_____

_____

figura *b*) _____

_____

figura *c*)

_____

_____

figura *d*)

_____

_____

5. RRJEDHA DHE SHENJA E FUNKSIONIT LINEAR

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- në shembujt konkretë përvetëson nocionet e funksionit rritës dhe zbritës;
- përvetëson teoremën, sipas së cilës funksioni linear $y = kx + n$ është rritës për $k > 0$, gjegjësisht zbritës për $k < 0$;
- mëson të shqyrtojë shenjën e funksionit;
- mëson se zeroja e funksionit linear e ndan boshtin x në dy intervale të pafundme, ashtu që në njërin prej atyre intervaleve funksioni merr vlera pozitive, kurse në intervalin tjetër vlera negative;
- në mënyrë të suksesshme i zgjidh detyrat në të cilat zbatohen dituritë e arritura mbi rrjedhën dhe shenjën e funksionit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Arsimtari u tërheq vëmendjen nxënësve në figurat 5.1 dhe 5.2. (Teksti, faqe 48 dhe 49).

Në figurat 5.1. dhe 5.2. janë paraqitur dy drejtëza, që paraqesin grafikët e funksioneve lineare. Kur do të flasim mbi pozitën e drejtëzës në rrafshin *Oxy*, do të kemi parasysh pozitën e saj në lidhje me boshtin x. Atëherë mund të flasim mbi ndryshimin e pozitave të dy drejtëzave në rrafsh.

a) Çdo drejtëz formon me drejtimin pozitiv të boshtit x, ose këndin e ngushtë (figura 5.1), ose këndin e gjerë (figura 5.2).

b) Zero të funksionit linear kemi quajtur pikën në të cilën grafiku i funksionit e pret boshtin x. Pjesa e grafikut të funksionit linear në figurën 5.1, që i përgjigjet pjesës së boshtit x që gjendet në **anën e majtë** (**në anën e djathtë**) të zeros së funksionit ndodhet **nën** (**mbi**) boshtin x. Te grafiku i funksionit linear në figurën 5.2. kemi situatën e anasjelltë. Pjesa e grafikut që i përgjigjet pjesës së boshtit x që është në **anën e majtë** (**të djathtë**) të zeros së funksionit ndodhet **mbi** (**nën**) boshtin x.

Funksioni linear jepet me anë të formulës $y = kx + n$.

A mund të konstatohet se cilat veti të përmendura nën a) dhe b) i ka grafiku i funksionit të dhënë me formulën $y = kx + n$, pa bërë vizatimin?

Arsimtari paralajmëron se një gjë e tillë mund të realizohet me ndihmën e shenjës së koeficientit k.

Para se të tregojmë se në ç'mënyrë mund të bëjmë këtë, të shqyrtojmë se si vetitë a) dhe b) mund të përfshihen me një veti. Sikur këmbësori do të lëvizte nëpër drejtëzën në figurën 5.1. ashtu që abshisat e pikave nëpër të cilat ai lëviz zmadhohen, atëherë ai do të ngjitet nëpër atë drejtëz. Mirëpo, këmbësori që në të njëjtën mënyrë do të lëvizte nëpër drejtëzën në figurën 5.2, do të zbritej nëpër atë drejtëz.

Në qoftë se këmbësori ngjitej (zbritet) nëpër drejtëz, atëherë grafiku i funksionit linear formon me drejtimin pozitiv të boshtit x këndin e gjerë (ngushtë). Përveç kësaj, në atë rast, pjesa e grafikut të tij që i përgjigjet pjesës së boshtit x që është në anën e **majtë** (**djathtë**) të zeros së funksionit ndodhet **nën** (**mbi**) **[mbi (nën)]** të boshtit x.

Si të përshkruhen fjalitë matematikisht "ngjitu nëpër drejtëz", gjegjësisht "zbritu nëpër drejtëz"?

Arsimtari për funksionet lineare përkufizon nocionet e funksionit rritës dhe funksionit zbritës.

Tani pyetja kryesore në këtë njësi mësimore mund të parashtrohet në këtë mënyrë:

Në cilën mënyrë, duke mos vizatuar grafikun e funksionit linear $y = kx + n$, mund të konstatohet, nëse ai funksion është rritës apo zbritës?

Para vërtetimit të pohimit, sipas të cilit funksioni linear është rritës për $k > 0$, gjegjësisht zbritës për $k < 0$, duhet të përsëriten vetitë e mëposhtme të mosbarazimeve të sakta numerike:

- Në qoftë se anës së majtë dhe anës së djathtë të mosbarazimit të saktë numerik a < b i shtojmë cilindo numër c, do të fitojmë mosbarazimin e saktë numerik $a + c < b + c$.
- Në qoftë se anën e majtë dhe anën e djathtë të mosbarazimit të saktë numerik $a < b$ e shumëzojmë me cilindo numër pozitiv c, do të përftojmë mosbarazimin e saktë numerik $ac < bc$.

• Në qoftë se anën e majtë dhe të djathtë të mosbarazimit të saktë numerik $a < b$ e shumëzojmë me numrin negativ c dhe, në qoftë se ndryshojmë drejtimin e shenjës së mosbarazimit, do të përftojmë mosbarazimin e saktë numerik $ac > bc$.

Mbas kësaj vërejtjeje arsimtari vërteton pohimet:

a) Në qoftë se $k > 0$, atëherë funksioni linear $y = kx + n$ është rritës.

b) Në qoftë se $k < 0$, atëherë funksioni linear $y = kx + n$ është zbritës.

• Disa funksione në detyrën 5.1. (Përmbledhja, faqe 26.) janë funksione lineare të dhëna në mënyrën eksplicite $y = kx + n$, kurse disa të tjera në mënyrën implicite $ax + by + c = 0$. U rekomandojmë arsimtarëve që, detyra e shndërrimit të funksionit të dhënë në mënyrë implicite, në mënyrë eksplicite ta bëjnë duke zgjidhur ekuacionin $ax + by + c = 0$ sipas ndryshores (të panjohurës) y. Kjo gjë është me rëndësi, sepse ky proces emërtohet ashtu gjatë zgjidhjes së ekuacioneve lineare dhe sistemeve të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura. Kështu për shembull, grafiku i ekuacionit $ax + by = c$ është grafiku i funksionit linear të përftuar duke zgjidhur atë ekuacion sipas ndryshores y.

• Në detyrat 5.6. dhe 5.7. (Përmbledhja, faqe 27.) flitet mbi shpejtësinë e rritjes, gjegjësisht mbi shpejtësinë e zbritjes së funksionit linear. Mbi shpejtësinë e rritjes së funksionit $y = kx + n$ mund të flasim në qoftë se $k > 0$, kurse mbi shpejtësinë e zbritjes, në qoftë se $k < 0$. Që nxënësit të kuptojnë domethënien gjeometrike të këtij nocioni, në sisteme të ndryshme të koordinatave duhet të vizatohen grafikët e funksioneve $y = x, y = 2x$ dhe $y = 3x$ dhe të përfundohet se ndër cilëtdo dy grafikë të atyre funksioneve, kënd më të madh me drejtimin pozitiv të boshtit x formon grafiku i atij funksioni, koeficienti k i të cilit është më i madh. Kjo është arsyeja, për shkak të së cilës, kur nga vlera e ndryshores sa pavarur $x = x_1$ kalojmë në vlerën më të madhe $x = x_2$, më së shumti zmadhohet vlera e funksionit $y = 3x$ (figurat 34, 35 dhe 36).

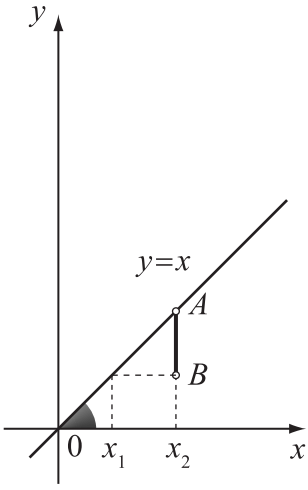


figura 34.

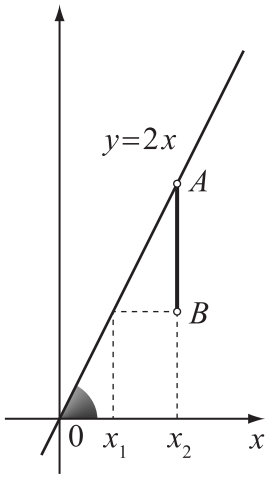


figura 35.

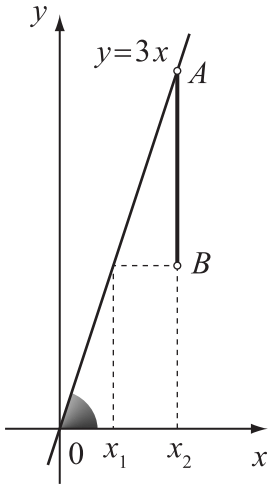


figura 36.

Këtë fakt e përshkruajmë ashtu që themi, për shembull, funksioni $y = 3x$ rritet më shpejt sesa funksionet $y = x$ dhe $y = 2x$. Në qoftë se vizatojmë grafikët e funksioneve $y = -x, y = -2x$ dhe $y = -3x$, do të shohim se ndër cilëtdo dy grafikë të atyre funksioneve, kënd më të madh me drejtimin pozitiv të boshtit x formon grafiku i atij funksioni, koeficienti k i të cilit është më i vogël. Në këtë rast madhësia e këndit, për të cilin kemi folur, është masa e shpejtësisë së zbritjes së funksionit. Sa më i madh që është ai kënd, shpejtësia e zbritjes së funksionit është më e vogël. Prandaj themi se funksioni $y = -3x$ zbritet më shpejt sesa funksionet $y = -x$ dhe $y = -2x$.

Të përfundojmë:

• Në qoftë se $k_1 > k_2 > 0$, atëherë themi se funksioni $y = k_1x$ rritet më shpejt sesa funksioni $y = k_2x$.

• Në qoftë se $0 > k_1 > k_2$, atëherë themi se funksioni $y = k_2x$ zbritet më shpejt sesa funksioni $y = k_1x$.

Kur grafiku i funksionit linear $y = kx + n$ përftohet duke bërë zhvendosjen paralele të grafikut të funksionit $y = kx$ përgjatë boshtit y (mbi çfarë do të flasim në temën e mëposhtme), nocionet shpejtësia e rritjes dhe shpejtësia e zbritjes përkufizohen në të njëjtën mënyrë edhe për ato funksione.

Pra:

• Në qoftë se $k_1 > k_2 > 0$, atëherë themi se funksioni $y = k_1x + b_1$ rritet më shpejt sesa funksioni $y = k_2x + b_2$.

• Në qoftë se $0 > k_1 > k_2$, atëherë themi se funksioni $y = k_2x + b_2$ zbritet më shpejt sesa funksioni $y = k_1x + b_1$.

Edhe njëherë nxënësve duhet t'u tërhiqet vëmendja se termi funksion përdoret në dy kuptime. Funksionin e kemi përkufizuar si rregull, sipas të cilës, secilës vlerë të ndryshores së pavarur i përgjigjet saktësisht një vlerë e ndryshores së varur. Mirëpo, për ndryshoren e varur *y* shpeshherë thuhet (ne edhe deri tani kemi vepruar kështu) se është funksion i ndryshores së pavarur *x*. Në këtë kontekst flitet mbi vlerat pozitive dhe negative të funksionit, mbi intervalet në të cilat funksioni është pozitiv, gjegjësisht negativ, mbi intervalet në të cilat funksioni rritet, gjegjësisht zbritet, etj.

Nxënësit duhet të dinë të përcaktojnë shenjën e funksionit, domethënë të përcaktojnë intervalet në të cilat ai funksion merr vlerat pozitive, si dhe intervalet në të cilët ai funksion merr vlerat negative.

• Në detyrën 5.11 (Përmbledhja, faqe27) duhet të përcaktohen intervalet në të cilat funksionet e dhëna marrin vlera pozitive, gjegjësisht vlera negative. Edhe njëherë të përmendim se do të ishte e dobishme që kalimin, nga shënimi implicit në atë eksplicit, nxënësit ta përshkruajnë si proces i zgjidhjes së ekuacionit $ax + by + c = 0$ sipas ndryshores *y*.

Në detyrën 5.12 duhet të zgjidhet inekuacioni $y > 0$, ku $y = kx + n$. Nxënësve duhet t'u theksohet se në këtë rast nuk bëhet fjalë mbi zbatimin e procesit të zgjidhjes së inekuacioneve lineare, por është fjala mbi zbatimin e njohurive të arritura mbi shenjën e funksionit linear. Pra, të zgjidhet inekuacioni $y > 0$ $(y < 0)$ domethënë se duhet të përcaktohet intervali në të cilin funksioni linear $y = kx + n$ merr vlera pozitive (negative).

• Në detyrën 5.13 duhet të vizatohen grafikët e funksionit linear $f_1(x)$ dhe $f_2(x)$, pastaj të zgjidhet inekuacioni $f_1(x) < f_2(x)$. Në bazë të figurës duhet të konstatohet se bashkësia e zgjidhjeve të inekuacionit $f_1(x) < f_2(x)$ ($f_1(x) > f_2(x)$) është ai interval në boshtin *x*, në të cilin grafiku i funksionit $f_1(x)$ ndodhet nën (mbi) grafikun e funksionit $f_2(x)$. Kështu duhet vepruar vetëm me qëllim që nxënësit të përvetësojnë interpretimin gjeometrik të inekuacionit $f_1(x) < f_2(x)$ ($f_1(x) > f_2(x)$).

• Në detyrën vijuese 5.14 nuk duhet të vizatohen grafikët e funksioneve $f_1(x)$ dhe $f_2(x)$. Mjafton të formohet funksioni i ri linear $y = f_1(x) - f_2(x)$. Atëherë duhet të zgjidhet inekuacioni $f_1(x) \le f_2(x)$ ($f_1(x) \ge f_2(x)$) domethënë të përcaktohen intervalet në të cilat funksioni i ri merr vlera pozitive (negative) dhe atyre intervaleve t'u shtohet zeroja e funksionit $y = f_1(x) - f_2(x)$.

6. POZITA RECIPROKE E GRAFIKËVE TË FUNKSIONEVE LINEARE

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- di se dy drejtëza në rrafsh ose përputhen, ose janë paralele, ose kanë saktësisht një pikë të përbashkët;
- përvetëson teoremën, sipas të cilës, pozita reciproke e dy drejtëzave të dhëna si grafikë të funksioneve lineare mund të përcaktohen duke krahasuar koeficientet përkatëse të atyre funksioneve;
- duke zbatuar këtë teoremë, zgjidh detyra të thjeshta gjeometrike.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Qëllimi kryesor, që dëshirojmë të arrijmë duke përpunuar këtë njësi mësimore është që nxënësit të përvetësojnë dituritë që do t'u mundësojnë që me mjete analitike të zgjidhin disa probleme gjeometrike.

Si t'u parafytyrojmë nxënësve në mënyrë spontane faktin se është fjala mbi një proces të rëndësishëm matematik?

Me siguri, mënyra më e mirë për një gjë të tillë është që nxënësit të kuptojnë se duke përvetësuar procesin e ri, problemet matematike që kanë qenë të vështira për ta të bëhen të lehta. Prandaj duhet t'u tregohet një tregim i përgjithshëm mbi vështirësitë që i përcjellin mënyrat e pastra gjeometrike të analizës së pozitave ndërmjet drejtëzave në rrafsh.

Nxënësit dinë se dy drejtëza në rrafsh ose përputhen, ose janë paralele, ose kanë saktësisht një pikë të përbashkët.

Si të tregohet nëse dy drejtëza përputhen a janë paralele dhe në fund, si të tregojnë se ato drejtëza kanë saktësisht një pikë të përbashkët?

Le të jenë p_1 dhe p_2 dy drejtëza në një rrafsh. Në qoftë se vërtetojmë se ato drejtëza kanë dy pika të përbashkëta dhe nëse kemi parasysh faktin se nëpër dy pika të ndryshme kalon saktësisht një drejtëz, atëherë kemi vërtetuar faktin se p_1 dhe p_2 përputhen. Në qoftë se vërtetojmë se drejtëzat p_1 dhe p_2 nuk kanë pika të përbashkëta atëherë do të konstatojmë se ato janë paralele. Në fund, në qoftë se vërtetojmë se drejtëzat p_1 dhe p_2 nuk përputhen dhe nuk janë paralele, do të përftojmë se ato drejtëza kanë saktësisht një drejtëz të përbashkët.

Nxënësit kanë përvetësuar se drejtëzat p_1 dhe p_2 janë grafikët e dy funksioneve lineare $y = k_1x + n_1$ dhe $y = k_2x + n_2$. Arsimtari rikujton zbatimin e metodës së koordinatave gjatë zgjidhjes së disa detyrave gjeometrike (pjesëtimi i segmentit në raportin e dhënë ose në disa detyra gjeometrike nga përmbledhja) dhe parashtron pyetjen:

A mund të konstatohet vetëm në bazë të formulave $y = k_1x + n_1$ dhe $y = k_2x + n_2$ (pra pa vizatuar) diçka mbi pozitën reciproke të drejtëzave p_1 dhe p_2?

Arsimtari paralajmëron se një gjë e tillë mund të konstatohet duke krahasuar koeficientin k_1 me koeficientin k_2 dhe koeficientin n_1 me koeficientin n_2. Edhe një herë duhet të theksohet se fjala është mbi procesin e konstatimit të raportit reciprok të dy drejtëzave në të cilin nuk përdoren argumentet gjeometrike.

Së pari shqyrtohet rasti $k_1 = k_2$ dhe $n_1 = n_2$. Është e qartë se në këtë rast drejtëzat p_1 dhe p_2 përputhen.

Shembulli 5. Të analizohet pozita reciproke e drejtëzave $y = \frac{3}{7}x - \frac{48}{6}$ dhe $y = \frac{39}{91}x - \frac{72}{9}$.

Zgjidhje: Këtu kemi $n_1 = -\frac{\cancel{48}^{8}}{\cancel{6}_{1}} = -8$ dhe $n_2 = -\frac{\cancel{72}^{8}}{\cancel{9}_{1}} = -8$ d.m.th. $n_1 = n_2$ dhe $k_2 = \frac{\cancel{39}^{3}}{\cancel{91}_{7}} = \frac{3}{7} = k_1$.

Nga këtu rrjedh se drejtëzat e dhëna përputhen.

Rasti i dytë është $k_1 \neq k_2$. Raporti reciprok i numrave n_1 dhe n_2 në këtë rast nuk ka asnjë domethënie.

Në shembullin 6.1. (Teksti, faqe 51) është parashtruar detyra në të cilën duhet treguar, nëse dy drejtëza të dhëna (grafikët e funksioneve lineare të dhëna) kanë pika të përbashkëta ose jo. Duke zgjidhur ekuacionet përkatëse, nxënësit tregojnë se drejtëzat e dhëna kanë saktësisht një pikë të përbashkët.

Arsimtari u tërheq vëmendjen nxënësve se ekuacioni linear i përfituar në procesin e zgjidhjes së detyrës paraprake ka pasur saktësisht një zgjidhje, sepse koeficientet pranë ndryshores x kanë qenë të ndryshem.

Në rastin e përgjithshëm, drejtëzat $y = k_1x + n_1$ dhe $y = k_2x + n_2$ kanë saktësisht një pikë të përbashkët vetëm në rastin kur ekuacioni linear $k_1x + n_1 = k_2x + n_2$ d.m.th. $(k_1 - k_2)x = n_2 - n_1$ i përftuar duke i barazuar anët e djathta të formulave $y = k_1x_1 + n$ dhe $y = k_2x + n_2$ ka saktësisht një zgjidhje. Ekuacioni i fundit ka saktësisht një zgjidhje vetëm në rastin kur $k_1 \neq k_2$.

Arsimtari shënon në tabelë teoremën:

Në qoftë se $k_1 \neq k_2$**, atëherë drejtëzat** $y = k_1x + n_1$ **dhe** $y = k_2x + n_2$ **priten.**

Në fund duhet të shqyrtohet rasti $k_1 = k_2$ *dhe* $n_1 \neq n_2$.

Shembulli 6.2. (Teksti, faqe 52) është mjaft i bindshëm drejt përvetësimit të teoremave:

1. Drejtëza $y = kx + n, n \neq 0$**, përftohet duke bërë zhvendosjen paralele përgjatë boshtit** y **për** $|n|$ **segmente njësi në drejtimin pozitiv ose negativ të drejtëzës** $y = kx$**, në varësi nga fakti a është** $n > 0$ **ose** $n < 0$.

2. Në qoftë se $k_1 = k_2$ **dhe** $n_1 \neq n_2$**, atëherë drejtëzat** $y = k_1x + n_1$ **dhe** $y = k_2x + n_2$ **janë paralele.**

Struktura e detyrave në Përmbledhje.

Qëllimi i detyrave 6.1 – 6.3, 6.4 dhe 6.6 është që duke vizatuar grafikët përkatës të ekuacioneve lineare, nxënësit të binden në sa më shumë shembuj në saktësinë e teoremës mbi raportin reciprok të grafikëve të ekuacioneve lineare.

Në detyrën 6.9. duhet të përcaktohen sipërfaqet e dy trekëndëshave të cilët i formojnë boshtet koordinative me dy drejtëza paralele.

Në detyrën 6.14. duhet të vihet re se drejtëzat $p(AB)$ dhe $p(CD)$ janë paralele me drejtëzën $y = x$. Pra, ekuacionet e atyre drejtëzave janë $y = x + n_1$ dhe $y = x + n_2$. Koeficientet n_1 dhe n_2 duhet të përcaktohen nga kushti që drejtëza $p(AB)$ të kalojë nëpër pikën $(0, -3)$, kurse drejtëza $p(CD)$ nëpër pikën $(0, 3)$.

Drejtëzat $p(AD)$ dhe $p(BC)$ janë paralele me drejtëzën $y = -x$. Me fjalë të tjera, ekuacionet e atyre drejtëzave janë $y = -x + n_1$ dhe $y = -x + n_2$. Koeficientet k_1 dhe k_2 mund të përcaktohen si në rastin paraprak. Në bazë të pozitës së drejtëzës *(PQ)* në detyrën 6.15 përcaktohen lehtë koordinatat e pikave *M* dhe N. Më tutje veprohet si në rastin paraprak.

Këndet e shënuara në figurën 6.3 në detyrën 6.16 mundësojnë që të veprohet njësoj si gjatë zgjidhjes së detyrës 6.14.

Në detyrat 6.17 dhe 6.18 koeficientet e funksioneve të dhëna lineare varen nga parametrat, të cilat duhen përcaktuar ashtu që të jenë të plotësuar kushtet e caktuara.

7. GRAFIKËT E FUNKSIONEVE TË PËRKUFIZUARA ME MË SHUMË FORMULA

Si motivacion për vizatimin e grafikëve të funksioneve me më shumë formula mund të shërbejnë detyra e mëposhtme.

Shembulli 6. Marku është nisur nga shtëpia në vozitjen e rregullt me biçikletë. Gjatë orës së parë ka vozitur me shpejtësi 30 km/h, pastaj ka pushuar një gjysmë ore, kurse gjatë kthimit në shtëpi ka vozitur me shpejtësi 20km/ h. Distanca e Markut nga shtëpia është funksion i kohës t, $s = s(t)$.

Të shkruajmë formulën me të cilën është dhënë funksioni s dhe të vizatohet grafiku i tij.

Zgjidhje:

Mbas një orë vozitje, distanca e Markut nga shtëpia është 30 km (një orë vozitjeje me shpejtësi 30 km/h). Vozitja prej vendit ku ka pushuar deri te shtëpia e tij ka zgjatur $\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$ orë. Pra, mungesa e tij nga shtëpia ka zgjatur 3 orë (një orë vozitjeje deri te vendi ku ka pushuar, $\frac{1}{2}$ orë pushimi dhe $\frac{3}{2}$ orë vozitjeje gjatë kthimit në shtëpi). Në momentin $t\in[0,1]$ distanca nga shtëpia ka qenë 30 t. Për $t\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$ distanca ka qenë 30 km, sepse gjatë asaj kohe Marku ka pushuar. Në fund, ajo distancë në momentin $t\in\left[\frac{3}{2},3\right]$ ka qenë e barabartë.

$$30-20(t-\frac{3}{2}) = 60\text{-}20t.$$

Tani mund të formohet formula me të cilën është dhënë funksioni $s = s(t)$:

$$s(t)=\begin{cases}30t, \text{ për } t\in[0,1],\\ 30, \text{ për } t\in\left[0,\frac{3}{2}\right],\\ 60-2t, \text{ për } t\in\left[\frac{3}{2},3\right].\end{cases}$$

Grafiku i këtij funksioni është dhënë në figurën 37.

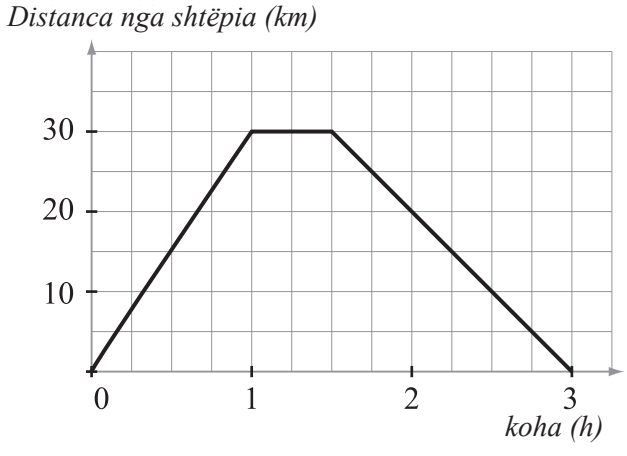


figura 37.

1. EKUACIONET ME DY TË PANJOHURA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin EDP-së (**e**kuacionin me **d**y të **p**anjohura);
- përvetëson nocionin e zgjidhjeve të EDP-së;
- përvetëson shënimin e zgjidhjeve të EDP në trajtën e çiftit të radhitur;
- zgjidh EDP të thjeshta që sillen në zgjidhje të ekuacioneve lineare me një të panjohur dhe ekuacione kuadratike të trajtës $x^2 = a$;
- përvetëson se EDP ka ose një numër të fundmë zgjidhjesh, ose pakufi zgjidhjesh, ose nuk ka zgjidhje;
- përvetëson nocionin e ekuacioneve të njëvlershme;
- zbaton rregullat standarde të formimit të vargut të ekuacioneve të njëvlershme (rregullën e rregullimit, kalimit, eliminimit dhe shumëzimit).

UDHËZIME DIDAKTIKE

Në programet lëndore për matematikën (për shkollat fillore) ekuacionet zënë vend të rëndësishëm. Ekuacionet e trajtës $x + a = b$ dhe $ax = b$ shqyrtohen fillimisht në bashkësinë e numrave natyrorë (klasa e katërt dhe e pestë), pastaj në bashkësitë e thyesave pozitive (klasa e gjashtë), numrave të plotë dhe racionalë (klasa e shtatë). Ekuacionet lineare dhe ekuacionet kuadratike të trajtës $x^2 = a$ shqyrtohen në klasën e tetë në bashkësinë e numrave realë. Nxënësit i kanë të njohura nocionet **barazimet e sakta dhe të pasakta, ekuacionet, zgjidhjet e ekuacioneve, ekuacionet e njëvlershme** dhe di çfarë domethënë **të zgjidhet ekuacioni.** Te ata është formuar parafytyrimi mbi procesin e zgjidhjes se ekuacioneve si proces në të cilin formohet vargu i ekuacioneve të njëvlershme me qëllim që në fund të atij vargu të përftohet ekuacioni që zgjidhet lehtë.

Ky është themeli në të cilin duhen bazuar nocionet e EDP, sistemet e ekuacioneve, zgjidhjet e EDP, zgjidhjet e sistemit të ekuacioneve, ekuacionet e njëvlershme, sistemet e njëvlershme etj, kryesisht në kontekstin e ekuacioneve lineare me dy të panjohura dhe sistemit të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura. Meqenëse është fjala mbi ekuacionet më të thjeshta dhe sistemet, tërë tema ka më shumë karakter operativ sesa teorik. Prandaj shkathtësia didaktike e arsimtarit në lidhje me këtë temë manifestohet, para së gjithash, në zgjedhjen e shembujve, të cilët nocionet dhe proceset që dëshirojnë t'i përvetësojnë nxënësit i ilustrojnë në një mënyrë interesante dhe të kuptueshme për ta.

Këtu do të prezantojmë një propozim të një numri të detyrave dhe shembujve të cilët, sipas mendimit tonë, plotësojnë ato kërkesa.

Në tekstin që vijon, nxënësve **pyetjet** ua parashtron arsimtari, kurse **përgjigjja** është përgjigjja e vetme korrekte dhe njëkohësisht përgjigjja e pritur në pyetjen e parashtruar. Me **D** janë shënuar detyrat që arsimtari u parashtron nxënësve për punë gjatë orës mësimore, kurse me ● komentet e autorëve. Më shpesh janë fjali në formën e pyetjes ose përgjigjes, shënimet në tabelë, kumtesat e zgjidhjeve të detyrave të parashtruara e kështu me radhë.

Natyrisht se përgjigjet e nxënësve nuk do të jenë gjithmonë të tilla siç janë shënuar në këtë tekst. Mirëpo, roli i arsimtarit është përveç tjerash, edhe që të udhëheqë me zotësi dialogun që do të "detyrojë" përgjigje të tilla.

Pyetje: Çfarë është ekuacioni me dy të panjohura?

● Arsimtari shënon në tabelë dy grupe ekuacionesh:

Grupi I: $4x+3=5-x,\ \ 3x^2+5x=4-(x-3)^2,\ \dfrac{3x+2}{4}+\dfrac{3-2x}{6}=\dfrac{x+1}{3}$

Grupi II: $4x+3y+2=5y-x,\ \ 2x^2+5y=4-(x-y)^2,\ \dfrac{3x+2y}{4}+\dfrac{x+3-2x}{6}=\dfrac{x+y+1}{3}$

dhe tregon mbi numrin e të panjohurave në ato ekuacione. Ekuacionet në grupin e parë kanë një të panjohur x, kurse në grupin e dytë dy të panjohura x dhe y.

Pyetje: Shënimet në të cilat dy shprehje janë të lidhura me shenjën e barazimit, ashtu që të paktën

njëra prej atyre shprehjeve përmban ndryshoren *x* dhe së paku njëra ndryshoren *y*, i quajmë ekuacione me dy të panjohura *x* dhe *y*.

Arsimtari përmend se në klasat paraprake janë shqyrtuar ekuacionet me një të panjohur dhe se qëllimi i mëtejshëm është të hulumtohen ekuacionet me dy të panjohura.

Arsimtari: Të rikujtojmë, zgjidhje e ekuacionit me një të panjohur është numri, me zëvendësimin e të cilit në ekuacionin e dhënë, përftohet barazimi i saktë numerik. Kontrolloni, nëse numrat 2 dhe 3 janë zgjidhje të ekuacionit $x^2+1=x+3$.

Përgjigjja: Numri 2 është zgjidhje e ekuacionit të dhënë, sepse kur të panjohurën *x* në të gjitha vendet në ekuacion e zëvendësojmë me numrin 2, përftojmë barazimin e saktë numerik $2^2+1=2+3$. Numri 3 nuk është zgjidhje e atij ekuacioni, sepse zëvendësimi i *x* me 3 në ekuacionin e dhënë sjell deri te barazimi i pa saktë numerik $3^2+1=3+3$.

Pyetje: Çfarë është zgjidhja e ekuacionit me dy të panjohura?

Ndryshoret *x* dhe *y* (shkronjat *x* dhe *y*) në ekuacionin me dy të panjohura mund t'i zëvendësojmë me dy numra të çfarëdoshëm. Çdo herë kur veprojmë ashtu do të përftojmë barazimin numerik që është ose i saktë ose i pasaktë.

Detyra: Ndryshoret *x* dhe *y* në ekuacionin $x^2+3=y^2-2$ të zëvendësohen me numra:

$$a)\ x=2,\ y=3, \qquad b)\ x=4,\ y=5.$$

Në cilin prej këtyre rasteve përftohet barazimi i saktë numerik dhe në cilin përftohet barazimi i pasaktë numerik?

Përgjigjja: Në rastin a) përftohet barazim i saktë, kurse në rastin b) barazim i pasaktë numerik:

$$a)\ 2^2+3=3^2-2, \quad b)\ 4^2+3=5^2-2.$$

Arsimtari: Zgjidhje të ekuacionit me dy të panjohura *x* dhe *y* quajmë secilin çift numrash x_0, y_0, me zëvendësimin e të cilit në ekuacion, në vend të të panjohurave *x* dhe *y* përftohet barazim i saktë numerik.

Pyetje: Si shënohen zgjidhjet e ekuacionit me dy të panjohura?

Detyra: Shqyrtoni, nëse numrat 1 dhe 2 janë zgjidhje të ekuacionit $x-y+1=2$.

• Me qëllim nuk është theksuar se cila nga ato vlera është vlera e të panjohurës *x*, kurse cila është vlera e të panjohurës *y*. Arsimtari sugjeron që një grup nxënësish (arsimtari e përcakton atë grup) të marrin $x = 1$ dhe $y = 2$, kurse grupi i dytë (nxënësit që nuk kanë hyrë në grupin e parë) të marrin $x = 2$ dhe $y = 1$.

Përgjigja: Nxënësit nga grupi i parë pohojnë se numrat 1 dhe 2 nuk janë zgjidhje e ekuacionit të dhënë, kurse nxënësit e grupit të dytë pohojnë se ata numra janë zgjidhjet e ekuacionit të dhënë.

Arsimtari: Që të evitojmë këto keqkuptime duhet të përcaktohemi mbi mënyrën e shënimit të zgjidhjeve të ekuacionit me dy të panjohura.

Zgjidhjen e ekuacionit me dy të panjohura e shënojmë në trajtën $x=a$, $y=b$ ose në trajtën e çiftit të radhitur (a, b), ashtu që në vend të parë <u>gjithmonë</u> shënohet vlera e të panjohurës *x*.

Detyra: Cili nga çiftet (2,3) dhe (3,2) është zgjidhje e ekuacionit $2x+y=7$?

Përgjigjja: Çifti (2,3) është zgjidhje e ekuacionit të dhënë, kurse çifti (3,2) nuk është.

Pyetje: Sa zgjidhje mund të ketë ekuacioni me dy të panjohura? Çfarë domethënë të zgjidhet ekuacioni?

Të rikujtojmë, shkalla e dytë a^2 e çdo numri real *a* është, ose numër pozitiv, ose i barabartë me zero. Barazimi $a^2 = 0$ është i saktë vetëm për $a = 0$. Në mënyrë të ngjashme, shuma e katrorëve $a^2 + b^2$ është ose numër pozitiv ose zero. Barazimi a^2+b^2 është i saktë vetëm në rastin kur $a = 0$ dhe $b = 0$.

Detyra: Përcakto të gjithë numrat *x* dhe *y*, shuma e të cilëve është e barabartë a) -1, b) 0. Me fjalë të tjera, zgjidhi ekuacionet:

$$a)\ x^2+y^2=-1,\ b)\ x^2+y^2=0.$$

Përgjigjja: a) Meqenëse shuma e katrorëve është ose numër pozitiv, ose zero, rrjedh se ekuacioni $x^2+y^2=-1$ nuk ka zgjidhje.

b) Shuma e katrorëve $x^2 + y^2$ është e barabartë me zero vetëm në rastin kur $x = 0$ dhe $y = 0$. Prandaj, ekuacioni $x^2+y^2=0$ ka saktësisht një zgjidhje $x = 0$ dhe $y = 0$.

Detyra: Sa zgjidhje ka ekuacioni $(x-1)^2+(y-2)^2=0$?

Përgjigjja: Shuma e katrorëve $(x-1)^2+(y-2)^2$ është e barabartë me zero vetëm në rastin kur $x-1=0$

dhe $y-2=0$. Nga këtu rrjedh se ekuacioni $(x-1)^2+(y-2)^2=0$ ka saktësisht një zgjidhje $x=1$ dhe $y=2$.

Arsimtari: Të shqyrtojmë sa zgjidhje ka ekuacioni $(x^2-9)^2+(y^2-4)^2=0$.

Shuma e katrorëve $(x^2-9)^2+(y^2-4)^2$ është e barabartë me zero vetëm në rast kur $x^2-9=0$ dhe $y^2-4=0$. Zgjidhjet e ekuacionit të parë janë numrat x_1 = 3 dhe $x_2=-3$, kurse zgjidhjet e ekuacionit të dytë $y_1=2$ dhe $y_2=-2$. Zgjidhjet e ekuacionit $(x^2-9)^2+(y^2-4)^2=0$ janë çiftet e renditura në të cilat në vendin e parë është vlera e të panjohurës x (x_1=3 ose x_2= -3), kurse në vendin e dytë vlerat e të panjohurës y_1=2 ose $y_2=-2$. Nga këtu rrjedh se ekuacioni i dhënë ka katër zgjidhje $(3;\ 2),(3;-2),\ (-3;\ 2)$ dhe $(-3;\ -2)$.

Detyra: Shqyrto sa zgjidhje ka ekuacioni $(x^2-16)^2+(y^2-25)^2=0$.

Përgjigjja: Zgjidhjet e ekuacionit të dhënë janë çiftet $(4,5),(4,-5),(-4,5)$ dhe $(-4,-5)$.

Pyetje: Sa zgjidhje ka ekuacioni $y-x=0$?

Në qoftë se në ekuacionin e dhënë vendosim vlerat $x=1, y=1; x=2, y=2; x=\sqrt{2}, y=\sqrt{2},...$ do të fitohen barazimet e sakta 1–1 = 0, 2–2 = 0, $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0,...$ Në përgjithësi, për çdo numër *a*, çifti i radhitur *(a,a)* është zgjidhje e atij ekuacioni. Vërtet, duke zëvendësuar vlerat $x = a$ dhe $y = a$ në ekuacionin e dhënë përftohet barazimi i saktë numerik: $a-a=0$. Meqenëse në çiftin (*a,a*), në vend të *a* mund të vendosim cilindo numër, rrjedh se ekuacioni ka pakufi zgjidhje.

Shembujt e mëparshëm tregojnë se ekuacioni me dy të panjohura ose ka një numër të fundmë zgjidhjesh, ose ka pakufi zgjidhjesh, ose nuk ka zgjidhje fare.

Bashkësia, elementet e së cilës janë zgjidhje të ekuacionit, quhet bashkësi zgjidhjesh e ekuacionit. Të përcaktojmë zgjidhjet e disa ekuacioneve nga shembujt paraprakë.

Bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit $x^2+y^2=0$ është $\{(0,0)\}$. Bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit $(x^2-9)^2+(y^2-4)^2=0$ është $\{(3,2),(3,-2),(-3,2),(-3,-2)\}$. Zgjidhje e ekuacionit $y-x=0$ është çdo çift që ka trajtën (a,a). Bashkësia e zgjidhjeve të tij është $\{(a,a): a\in R\}$.

Të zgjidhet ekuacioni domethënë të përcaktohet bashkësia e zgjidhjeve të tij ose të tregohet se ai ekuacion nuk ka zgjidhje.

EKUACIONET E NJËVLERSHME

PËR CILAT EKUACIONE THEMI SE JANË TË NJËVLERSHME?

Ky është për nxënësit takimi i dytë me nocionin e ekuacioneve të njëvlershme. Në klasën e shtatë ai nocion është shqyrtuar në detaje për ekuacionet lineare me një të panjohur. Nxënësit duhet të rikujtohen në përkufizimin e ekuacioneve të njëvlershme dhe të tregohet për qëllimin e formimit të ekuacioneve të tilla. Ai qëllim mbulohet me faktin se ekuacionet e njëvlershme kanë bashkësitë e barabarta të zgjidhjeve. Arsimtari thekson se ekuacionin e dhënë duhet ta sjellim në ekuacionin e njëvlershëm me të, mundësisht që ka formën më të thjeshtë, duke shpresuar që ajo formë e ekuacionit të përftuar të mundësojë zgjidhjen e tij, dhe njëkohësisht, zgjidhjen e ekuacionit fillestar.

Si formohen ekuacionet e njëvlershme për ekuacionin e dhënë?

Si edhe në klasën e tetë, shqyrtohen katër rregulla të transformimit të ekuacionit të dhënë në ekuacion të njëvlershëm.

Rregulla e rregullimit është procesi që kryhet me qëllim që shprehjet në anën e djathtë dhe të majtë të ekuacionit të transformohen në trajtë sa më të thjeshtë. Në shembujt që do të shqyrtohen këtu, kjo realizohet duke kryer veprimet algjebrike, duke zbatuar rregullën shpërndarëse, duke zbatuar rregullën e mënjanimit të kllapave etj.

Rregulla e kalimit zbatohet kur duam që një kufizë të dëshiruar të ekuacionit të dhënë ta kalojmë prej njërës anë në anën tjetër të shenjës së barazimit.

Rregulla e eliminimit zbatohet kur në anën e majtë të ekuacionit figurojnë kufizat e caktuara të barabarta me kufizat në anën e djathtë të tij. Kjo rregull mundëson që nga ekuacionet e dhëna të kalohet në ekuacionet e njëvlershme të përftuara duke eliminuar kufizat e tilla, si në anën e majtë, ashtu edhe në anën e djathtë të shenjës së barazimit.

Rregulla e shumëzimit më shpesh zbatohet kur dëshirojmë të lirohemi nga thyesat në ekuacion.

Mbas përshkrimit të secilës rregull duhet të përpunohet nga një shembull. Mund të përpunohen shembujt 1.7, 1.8, 1.9 dhe 1.10 (Teksti, faqe 58-59).

2. EKUACIONET LINEARE ME DY TË PANJOHURA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e ekuacionit linear me dy të panjohura;
- zgjidh ekuacione lineare standarde me dy të panjohura sipas të panjohurës *x* dhe sipas të panjohurës *y* dhe përvetëson se ekuacioni i përftuar ashtu është i njëvlershëm me ekuacionin fillestar;
- përvetëson procesin e përcaktimit të zgjidhjeve të caktuara dhe bashkësisë së zgjidhjeve të ekuacionit linear standard me dy të panjohura;
- zgjidh detyrat në të cilat ekuacioni linear duhet të sillet në formën standarde;
- zgjidh detyrat e thjeshta në të cilat duhet përcaktuar:
  a) zgjidhja e ekuacionit linear që plotëson një kusht të caktuar,
  b) ekuacioni linear, zgjidhje e të cilit është çifti i dhënë i numrave;
- duke zbatuar ekuacionet lineare, zgjidh disa detyra nga jeta e përditshme.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Me qëllim që t'u tërhiqet vëmendja nxënësve në Tekst, para futjes në përdorim të nocionit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura, shqyrtohet shembulli konkret (shembulli 2.1, Teksti, faqe 60) në të cilin varësia ndërmjet madhësive të panjohura të shënuara me *x* dhe *y* shkruhet në trajtën e ekuacionit $4x + 2y = 36$. Natyra e madhësive në shembullin 1.2 kërkon që në një moment të caktuar tregohet në faktin se zgjidhjet e ekuacionit të dhënë duhet t'i kërkojmë në bashkësinë e numrave natyrorë. Në anën tjetër, kjo na detyron që në një moment të caktuar, mbas përpunimit të shembullit 1.2, të theksojmë se ekuacioni $4x + 2y = 36$, krahas zgjidhjeve që i përgjigjen kuptimit të detyrës, në atë shembull ka edhe zgjidhje të tjera.

Tani mund të formulojmë problemin që duhet ta zgjidhim:

Si të përcaktohet bashkësia e zgjidhjeve të ekuacionit $4x+2y=36$?

Ekuacioni i dhënë, duke zbatuar rregullën e shumëzimit dhe kalimit transformohet në ekuacionin e njëvlershëm $y=-2x+18$. Kjo është arsyeja që në nivel të përgjithshëm (përkufizimi në faqe 61,Teksti) të precizohet kuptimi i detajit më të rëndësishëm, jo vetëm në procesin e përcaktimit të bashkësisë së zgjidhjeve të ekuacionit linear, por edhe në procesin e zgjidhjes së sistemit të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura duke zbatuar metodën e ndërrimit. Fjala është mbi zgjidhjen e ekuacionit linear standard sipas të panjohurës *y*, gjegjësisht të panjohurës *x*. Formulën $y=-2x+18$ e kemi quajtur ekuacion. Gjatë përpunimit të temës paraprake, funksionin e dhënë me anë të asaj formule e kemi quajtur funksion linear. Kemi, në shikim të parë, dy interpretime të ndryshme të të njëjtës formulë, dhe kjo mund të ngatërrojë nxënësin. Nxënësi që do të vërente një gjë të tillë e meriton përgjigjen. Mund t'i ofroni sqarimin e mëposhtëm.

Për çdo ekuacion mund të formojmë bashkësinë *D*, elementet e së cilës janë numrat *x* për të cilët ekziston numri *y*, i tillë që çifti (*x*,*y*) është zgjidhje e atij ekuacioni. Në këtë mënyrë, në bashkësinë *D* është përkufizuar rregulla (që nuk është doemos funksion), sipas të cilës çdo numri $x\in D$ i shoqërohet një ose më shumë numra realë.

Të japim një shembull. Më herët kemi treguar se ekuacioni $(x^2-9)^2+(y^2-4)^2=0$ ka katër zgjidhje $\{(3,2),(3,-2),(-3,2),(-3,-2)\}$. Bashkësia *D* për këtë ekuacion ka dy elemente, $D=\{3,-3\}$. Rregulla mbi të cilën kemi folur nuk është funksion në bashkësinë *D,* sepse numrave 3 dhe -3 u shoqërohen, jo saktësisht një element, siç është paraparë me përkufizimin e funksionit, por bashkësi dy anëtarëshe.

$$3\to\{2,-2\},-3\to\{2,-2\}.$$

Në rastin e ekuacionit $4x+2y=36$ ajo rregull është funksion; është pikërisht funksioni linear i dhënë me anë të formulës $y=-2x+18$. Prandaj për atë formulë mund të flasim si mbi një ekuacion (sepse plotëson përkufizimin e ekuacionit) ose si mbi një funksion.

Duke zbatuar ekuacionin (funksionin linear, formulën) $y=-2x+18$ për çdo numër real *x* mund të përcaktojmë numrin real *y*, ashtu që çifti (*x*,*y*) është zgjidhje e ekuacionit, gjegjësisht ekuacionit të njëvlershëm me të $4x+2y=36$.

Kjo rregull mund të ilustrohet ashtu që ju do të formoni tabelën:

x	-1	$\frac{7}{2}$	10	12
$y=-2x+18$				

Nxënësit plotësojnë tabelën dhe vërtetojnë a janë çiftet e fituara (x,y) vërtet zgjidhjet e ekuacionit $4x+2y=36.$

Në fund duhet të përgjigjen në pyetjen e parashtruar në fillim të përpunimit të këtij titulli.

Zgjidhjet e ekuacionit $4x+2y=36$ janë çiftet që kanë formën $(x,-2x+18)$, ku x mund të jetë një numër i çfarëdoshëm real. Bashkësia e zgjidhjeve të atij ekuacioni është bashkësia:

$$\{(x;\ -2x+18):x\in R\}.$$

Ekuacionin $ax+by=c$ e kemi quajtur ekuacion standard linear, ndërkaq ekuacione lineare kemi quajtur ato ekuacione me dy të panjohura, të cilat duke zbatuar rregullën e rregullimit, kalimit, eliminimit dhe shumëzimit mund të transformohen në formën standarde. Duhet të përpunohen disa shembuj në të cilët ekuacioni i dhënë transformohet në formën standarde (shembulli 2.3, Teksti, faqe 62). Në bazë të atyre shembujve nxirret përfundimi i përgjithshëm:

Ekuacioni linear me dy të panjohura ka pakufi zgjidhje të ndryshme.

Të japim edhe disa detyra, të cilat na duken të paevitueshme, kur është fjala për përpunimin e kësaj njësie mësimore.

Detyra: Cilat nga ekuacionet e dhëna me dy të panjohura janë ekuacione standarde lineare:

$a)\ 4x+7y=13,\qquad b)\ 5x^2-6y=17,$

$c)\ 2x+13xy=11,\qquad d)\ 7x-5y=19?$

Përgjigjja: Ekuacionet a) dhe *d*) janë ekuacione lineare standarde, sepse kanë formën ax + by = c. Ekuacionet b) dhe c) nuk kanë formën e tillë, prandaj nuk janë ekuacione lineare.

Pyetje: Çfarë është zgjidhja e ekuacionit me dy të panjohura?

Përgjigjja: Zgjidhje e ekuacionit linear me dy të panjohura është çdo çift i numrave (x_0,y_0) , zëvendësimi i të cilit në ekuacion (d.m.th. shënimi i numrit x_0 në vend të ndryshore x dhe numrit y_0 në vend të ndryshores y), sjell deri te barazimi i saktë.

• Në pesë detyrat në vazhdim, një grup nxënësish punon detyrën a), kurse grupi i dytë detyrën b). Nga një nxënës nga secili grup kumton në tabelë zgjidhjen e detyrës.

Detyra: Cili nga çiftet (x,y) të dhëna në tabelën

x	–6	–5	–4	–2	0	3
y	–1	2	3	–4	–3	–4

është zgjidhje e ekuacionit:

$a)\ 2x+y=-8,\qquad b)\ x+3y=-9?$

Arsimtari: Të marrim numrat e çfarëdoshëm, për shembull 7 dhe 4, dhe të përcaktojmë vlerën e shprehjes $7x+4y$ për $x=-2$ dhe $y=3$:

$$a)\ 7x+4y=7\cdot(-2)+4\cdot 3=-2.$$

Në këtë mënyrë kemi formuar ekuacionin linear $7x+4y=-2$ zgjidhja e të cilit është çifti i dhënë i numrave $x=-2,$ dhe $y=3.$

Detyra: Formoni ekuacionin linear, zgjidhje e të cilit është çifti:

$a)\ x=2, y=-3,\qquad b)\ x=-3, y=-2,5.$

• Arsimtari sqaron përse nxënësit nga i njëjti grup kanë përftuar ekuacione të ndryshme.

Detyra: Ekuacionet e dhëna lineare të zgjidhen sipas të panjohurës y, pastaj sipas të panjohurës x:

$a)\ 4x+3y=12,\qquad b)\ 7y-2x=3.$

Detyra: Ekuacionet e dhëna lineare të zgjidhen sipas të panjohurës y, pastaj të përcaktohen nga tri zgjidhje të atyre ekuacioneve:

$a)\ 2x+3y=5,\qquad b)\ 2y-5x=-2.$

Detyra: Ekuacionet lineare të dhëna të zgjidhen sipas të panjohurës *x*, pastaj të plotësohet tabela:

$a)\ 2x - y = 5, \qquad b)\ 2y - x = -3.$

y	1	3	5	7
$x =$				

Arsimtari: Të përcaktohet vlera e koeficientit të panjohur në ekuacionin *2x + by* = 26, ashtu që çifti $x = 3, y = -4$ të jetë zgjidhje e atij ekuacioni.

Në qoftë se në ekuacionin $2x + by = 26$ vendosim vlerat $x = 3, y = -4$, përftojmë ekuacionin linear sipas të panjohurës *b*:

$$2 \cdot 3 + b \cdot (-4) = 26.$$

Zgjidhja e këtij ekuacioni është $b = -5$. Ekuacioni i kërkuar është $2x - 5y = 26$.

Arsimtari: Të përcaktohet vlera e koeficientit të panjohur në ekuacionin $a)\ 4x + by = 17$, $b)\ ax + 3y = 17$, ashtu që çifti $x = 2, y = 3$ të jetë zgjidhje e atij ekuacioni.

Arsimtari: Të vërejmë ekuacionin $3x + 7y = 37$. Të përcaktojmë atë zgjidhje të këtij ekuacioni, të cilën e përbën çifti, në të cilin vlera e të panjohurës *x* është për një më e vogël se vlera e të panjohurës *y*.

Sipas kushtit të detyrës, për numrat *x* dhe *y* vlen *y* = *x* + 1.

Në qoftë se në ekuacionin $3x + 7y = 37$ në vend të *y* shënojmë *x* + *y*, do të përftohet ekuacioni linear me një të panjohur:

$$3x + 7(x + 1) = 37,$$
$$3x + 7x + 7 = 37$$
$$10x = 30 \,\vdots\, 10,$$
$$x = 3.$$

Tani nga $y = x + 1$ për *x* = 3, përftojmë *y* = 4. Çifti i kërkuar është (3,4). Të vërejmë se në këtë detyrë zgjidhet në të vërtetë sistemi $\begin{cases} y = x + 1 \\ 3x + 7y = 37 \end{cases}$, dhe ky fakt nuk theksohet në mënyrë eksplicite.

Detyra: Të përcaktohet ajo zgjidhje e ekuacioneve $a)\ 2x - y = 5,\ b)\ 3y - x = 3$ të cilën e përbën çifti në të cilin vlera e të panjohurës *x* është për një më e madhe se vlera e të panjohurës *y*.

- Duhet të përpunohen disa detyra në të cilat kërkohet që ekuacioni linear të sillet në formën standarde
- Të japim edhe disa detyra interesante, por pak më të vështira.

1. Në sa mënyra punëtorja e kasës mund të kthejë kusurin 28 €, në qoftë se në kasë ka vetëm monedha nga 2€ dhe nga 5€?

2. Çmimi i biletës për ndeshjen e futbollit është 7€ për tribunën A, kurse 5 € për tribunën B. Marku për miqtë e tij ka blerë disa bileta për tribunën A dhe disa bileta për tribunën B dhe ka paguar 44 €. Sa bileta ka blerë Marku për tribunën A dhe sa për tribunën B?

3. Në një shitore janë shitur disa këmisha me çmimin 35 € dhe disa të tjera me çminim 30 €. Sa këmisha janë shitur me çmimin 35 € dhe sa këmishe me çmimin 30 €, në qoftë se nga ajo shitje janë fituar 320 €?

4. Numri *b* është përftuar ashtu që shifrave të numrit dyshifror *a* u janë ndryshuar vendet. Të përcaktohen numrat *a* dhe *b* ashtu që numri *b* të jetë për 72 më i madh se numri *a*.

Sipas modelit të këtyre detyrave është lehtë të formohen detyrat me përmbajtje të tjera.

Do të japim udhëzimin për detyrën e parë. Detyrat e tjera zgjidhen në mënyrë të ngjashme.

Të shënojmë me *x* numrin e monedhave nga 2 €, kurse me *y* numrin e monedhave nga 5 €, të nevojitura që të kthehet kusuri 28 €. Atëherë kemi *2x + 5y* = 28. Meqenëse *x* dhe *y* janë numra natyrorë, nga ekuacioni i dhënë rrjedh se numri *y* është çift dhe se *5y* < 28. Numrat *y* që plotësojnë këto kushte janë 2 dhe 4. Për *y* = 2 dhe *y* = 4 përftojmë *x* = 9 dhe *x* = 4.

Prandaj, punëtorja në kasë mund të kthejë kusurin me 9 monedha nga 2 € dhe 4 monedha nga 5 €, ose 4 monedha nga 2 € dhe 4 monedha nga 5 €.

3. GRAFIKU I EKUACIONIT ME DY TË PANJOHURA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e grafikut të EDP-së;
- vizaton me sukses grafikët e thjeshtë të EDP-së;
- përvetëson se grafiku i ekuacionit linear me dy të panjohura është drejtëz;
- zgjidh detyrat e thjeshta në lidhje me grafikët e EDP-së.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Në pjesën hyrëse të këtij titulli duhet të përkufizohet nocioni i grafikut të ekuacionit dhe si shembuj më të thjeshtë të përpunohen shembujt 3.1, 3.2 dhe 3.3 (Teksti, faqe 63). Grafiku i ekuacionit linear standard mund të themelohet në mënyrë më efikase sesa bëhet zakonisht në literaturën standarde. Një gjë e tillë mund të arrihet ashtu që në shembuj, ai grafik të mos shqyrtohet si grafik vetëm i ekuacionit linear standard, por edhe grafik i ekuacioneve ekuivalente me atë ekuacion.

Në këtë kontekst i rekomandojmë arsimtarit që përvetësimin e qëllimeve operative ta fillojë me shembullin e mëposhtëm.

Shembulli 1. Të sillet ekuacioni

$$(x+3)^2+9+y=(x-1)^2+2(5x+8)$$

në formën standarde ekuivalente me të $y=f(x)$.

Zgjidhje: Duke zbatuar rregullat e rregullimit, kalimi dhe eliminimit në ekuacionin e dhënë përftojmë:

$$\cancel{x^2}+6x+9+9+y=\cancel{x^2}-2x+1+10x+16,$$
$$6x+18+y=8x+17,$$
$$y=2x-1.$$

Mbas këtij shembulli, arsimtari thekson se tani e prapa do të shqyrtohen grafikët e ekuacioneve me dy të panjohura të cilët, duke zbatuar rregullat e rregullimit, kalimit, eliminimit dhe shumëzimit mund të sillen në ekuacion **ekuivalent** (**të njëvlershëm)** y = f(x). Në formulën $y=f(x)$ (në shembullin 1 ajo formulë është $y=2x-1$) mund ta shqyrtojmë si ekuacion ekuivalent me ekuacionin fillestar, si dhe si funksion, d.m.th. si rregullën sipas të cilës çdo vlere të të panjohurës x i përgjigjet saktësisht një vlerë e të panjohurës y = f(x), ashtu që çifti është zgjidhje e ekuacionit fillestar. Gjithashtu, ekuacioni fillestar, përveç zgjidhjeve të formës $(x, y=f(x))$ nuk ka zgjidhje të tjera. Nga këtu rrjedh se pikat në rrafshin *Oxy*, koordinatat e të cilave janë $(x, y=f(x))$ formojnë grafikun e ekuacionit fillestar. Mirëpo ato pika përbëjnë edhe grafikun e funksionit $y=f(x)$. Tani mund të nxirret përfundimi:

Grafiku i ekuacionit me dy të panjohura që mund të sillet në ekuacionin ekuivalent $y=f(x)$ **përputhet me grafikun funksionit** $y=f(x)$.

Shembulli 2. Të përcaktohen disa (për shembull katër) zgjidhje të ekuacionit:

$$(x+3)^2+9+y=(x-1)^2+2(5x+8)$$

pastaj të vizatohet grafiku i tij.

Zgjidhje: Ekuacioni i dhënë është ekuivalent me ekuacionin $y=2x-1$ (shembulli 1).

Duke zbatuar formulën $y=2x-1$, për $x=0, x=1, x=2, x=3$ përftojmë $y=-1, y=1, y=3, y=5$. Kështu kemi përcaktuar katër zgjidhje të ekuacionit të dhënë:

$$(0,-1),(1,1),(2,3),(3,5).$$

Grafiku i ekuacionit të dhënë përputhet me grafikun e funksionit linear $y=2x-1$. Grafiku i funksionit linear është drejtëz, prandaj për vizatimin e grafikut të funksionit të tillë mjaftojnë dy pika të tij.

Në këtë rast ne mund të marrim, për shembull pikat (0, -1) dhe (1,1). Nxënësit vizatojnë grafikun.

Të kalojmë në përpunimin e grafikut të ekuacionit linear standard.

Arsimtari rikujton se ekuacioni i tillë, duke e zgjidhur sipas të panjohurës *y* mund të shënohet në formën ekuivalente $y = kx + n$ (nuk duhet të shënohet formula $y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$). Nga shqyrtimet paraprake rrjedh se grafiku i ekuacionit $ax + by = c, b \neq 0$ përputhet me grafikun e funksionit linear $y = kx + n$.

Shembulli 3. Të vizatohet grafiku i ekuacionit $3x - 2y = 6$ (Teksti, faqe 63).

Zgjidhja: Duke zgjidhur ekuacionin sipas të panjohurës *y* përftojmë $y = \frac{3}{2}x - 3$. Grafiku i ekuacionit $3x - 2y = 6$ përputhet me grafikun e funksionit linear $y = \frac{3}{2}x - 3$ (Teksti, faqe 64, figura 3.4).

Në fund duhet të përpunohen shembujt 3.5 dhe 3.6.

Të japim edhe disa detyra të cilat, krahas detyrave në të cilat kërkohet të ndërtohet grafiku i ekuacionit standard, duhet të përpunohen në orën mësimore.

Pyetja: Cilat pika e përbëjnë grafikun ekuacionit $3x + 4y = 12$?

Përgjigjja: Grafikun e atij ekuacioni e përbëjnë pikat e rrafshit koordinativ, koordinatat e të cilit janë zgjidhjet e atij ekuacioni.

Pyetje: Si të verifikojmë, nëse pika *A*(4,1) i takon grafikut të atij ekuacioni?

Përgjigjja: Duhet të verifikohet, nëse çifti (4,1) është zgjidhje e ekuacionit të dhënë. Në qoftë se është, atëherë pika *A* i takon grafikut të tij. Në të kundërtën, pika *A* nuk i takon grafikut të ekuacionit të dhënë.

Detyra: Cila nga pikat $A(4,1)$, $B(1,3)$, $C(-6;-7,5)$, $D(0,3)$ i takon grafikut të funksionit $3x + 4y = 12$?

Pyetje: Si të verifikojmë a kalojnë grafikët e ekuacioneve $3x - 5y = -5$, $-x + 10y = 21$ nëpër pikën e dhënë A?

Përgjigjja: Duhet të verifikohet nëse koordinatat e pikës *A* janë zgjidhje të dy atyre ekuacioneve të dhëna apo jo. Në qoftë se përgjigja është afirmative, grafikët e ekuacioneve të dhëna kalojnë nëpër pikën *A*, kurse në qoftë se përgjigjja është negative, rrjedh se ato grafikë nuk kalojnë nëpër pikën A.

Detyra: Vërtetoni se grafikët e ekuacioneve $3x - 5y = -5$, $-x + 10y = 21$ kalojnë nëpër pikën $A(-1,2)$.

Pyetje: Në drejtëzën që paraqet grafikun e ekuacionit linear $21x - 5y = 105$ është vërejtur pika A, abshisa e të cilës është 3. Si të përcaktohet ordinata e asaj pike?

Përgjigjja: Në ekuacionin e dhënë duhet zëvendësuar *x* = 3. Do të përftohet ekuacioni linear sipas të panjohurës *y*. Zgjidhje e atij ekuacioni është ordinata e pikës *A*.

- Nxënësit përcaktojnë ordinatën e pikës *A*.

Pyetje: Në drejtëzën që paraqet grafikun e ekuacionit linear $12x - 5y = 132$ është vërejtur pika *A*, abshisa e të cilës është 1. Si duhet të përcaktohet abshisa e asaj pike?

Përgjigjja: Në ekuacionin e dhënë duhet të zëvendësohet *y* = 1. Do të përftohet ekuacioni sipas të panjohurës *x*. Zgjidhje e atij ekuacioni është abshisa e pikës *A*.

- Nxënësit përcaktojnë abshisën e pikës *A*.
- Dy detyrat e fundit janë të rëndësishme, sepse procesi i zgjidhjes së tyre përdoret gjatë zbatimit të metodës së zëvendësimit dhe të metodës së koeficienteve të kundërta.

Detyra: Të përcaktohen disa zgjidhje të ekuacionit

$$a)\ (x+2)^2 + (x+3)^2 + y = 2(x+3)^2 - 6,$$

$$b)\ (2x-5)^2 + y^2 = 4x^2 - 18x + 22 + (y-1)^2,$$

pastaj të vizatohet grafiku i tij.

- Një detyrë nxënësit e punojnë në klasë, kurse detyrën tjetër në shtëpi.

4. SISTEMI I DY EKUACIONEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e sistemit të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura;
- përvetëson nocionin e zgjidhjes së sistemit të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura;
- përvetëson shënimin e zgjidhjeve të sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura në formën e çiftit të radhitur;
- di se çfarë domethënë të zgjidhet sistemi i ekuacioneve lineare me dy të panjohura.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Në pjesën hyrëse të orës së parë të kushtuar kësaj teme, duhet të parashtrohet një detyrë konkrete e cila duhet t'u tërheqë vëmendjen nxënësve. E tillë është, sipas mendimit tonë, detyra e dhënë në shembullin 4.1. (Teksti, faqe 65). Ajo detyrë mund të zgjidhet duke mos përdorur metodën e zgjidhjeve të sistemeve lineare me dy të panjohura, siç është vepruar në Tekst. Që nxënësit të mos mendojnë se fjala është mbi një metodë universale dhe që të parashtrojmë pyetjen e zgjidhjes së sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura, duhet të përpunohet shembulli 4.2. (Teksti, faqe 65). Duke zbatuar shembullin 4.2. si model, përkufizohet nocioni i sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura, precizohet se çfarë është zgjidhja e tij dhe çfarë domethënë të zgjidhet një sistem i tillë.

Përvetësimit të atyre nocioneve i kontribuon detyra e mëposhtme:

1. Tregoni a janë çiftet $(3,4)$ dhe $(2,2)$ zgjidhje të sistemit $\begin{cases} x+y=4, \\ 2x-y=2. \end{cases}$

2. Cili nga çiftet $(-3,4)$, $(-2,-6)$ dhe $(-4,3)$ është zgjidhje e sistemit:

$$a)\begin{cases} x=y-7, \\ 3x+4y=0; \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x-y=0, \\ 5x-y=4? \end{cases}$$

3. Të formohet sistemi i ekuacioneve, zgjidhja e të cilit është çifti:

$a)\ x=4, y=1;$ $\qquad b)\ x=0, y=3.$

Gjatë zgjidhjes së detyrave tekstuale duke zbatuar sistemin e ekuacioneve lineare (çfarë duhet të jetë pjesa më e rëndësishme e kësaj teme), problemi më i madh për nxënësit është zgjedhja e ndryshoreve dhe formimi i sistemit në bazë të kushteve të dhëna. Prandaj propozojmë që çdo detyrë shtëpie, që nxënësit e përftojnë gjatë përpunimit të temës, të përmbajë nga një detyrë konkrete në të cilën duhet të formohet modeli matematik i një problemi konkret.

Të japim disa shembuj:

1. Janë dhënë dy numra x dhe y. Me ndihmën e sistemit shënoji këto kushte:
- Numri x është për 6 më i madh se numri y.
- Shuma e atyre numrave është 40.

Zgjidhje: $\begin{cases} y=x-6 \\ x+y=40. \end{cases}$

2. Janë dhënë dy numra x dhe y. Me ndihmën e sistemit shënoji këto kushte:
- Në qoftë se numrin e parë e shumëzojmë me 4 (d.m.th. në qoftë se numrin e parë e zmadhojmë 4 herë), do të fitohet numri që është 6 herë më i madh sesa numri 2.
- Në qoftë se numrin e dytë e zvogëlojmë për 2, do të përftohet numri që është për 5 më i vogël sesa numri i parë.

Zgjidhje: $\begin{cases} 4x = 6y, \\ y - 2 = x - 5. \end{cases}$

3. Janë dhënë dy numra *x* dhe *y*. Me ndihmën e sistemit shënoji kushtet e mëposhtme:
- Në qoftë se numrin e parë e zmadhojmë dy herë, do të përftohet numri për 1 më i madh sesa i dyti.
- Në qoftë se numri i dytë zmadhohet dy herë, do të përftohet numri që është 7 herë më i madh sesa i pari.

Zgjidhje: $\begin{cases} 2x = y + 1, \\ 2y = x + 7. \end{cases}$

4. Janë dhënë dy numra *x* dhe *y*. Me ndihmën e sistemit shënoji kushtet e mëposhtme:
- Njëri prej atyre numrave është 2 herë më i madh sesa i dyti.
- në qoftë se numri më i vogël ndër ata numra zmadhohet katër herë, kurse numri më i madh dy herë, atëherë shuma e numrave të përftuar do të jetë e barabartë me 44.

Zgjidhje: $\begin{cases} y = 2x, \\ 4x + 2y = 44. \end{cases}$

5. Le të jenë *x* dhe *y* gjatësitë e brinjëve të paralelogramit. Me ndihmën e sistemit shënoji kushtet e mëposhtme:
- Perimetri i paralelogramit është 120 cm.
- Një brinjë e paralelogramit është për 6 cm më e gjatë sesa brinja tjetër.

Zgjidhje: $\begin{cases} 2x + 2y = 120, \\ y = x + 6. \end{cases}$

6. Qytetet *A* dhe *B* i lidhin dy rrugë. Le të jetë *x,* gjatësia e rrugës së parë, kurse *y,* gjatësia e brinjës së dytë. Me ndihmën e sistemit shënoji kushtet e mëposhtme:
- Rruga e parë është 15 km më e gjatë sesa rruga e dytë.
- Të dy rrugët kanë gjatësinë e përgjithshme 335 km.

Zgjidhje: $\begin{cases} x = y + 15, \\ x + y = 335. \end{cases}$

7. Mjeshtri dhe ndihmësi i tij, për punën e përfunduar kanë fituar 627 €. Le të jetë *x,* mëditja e mjeshtrit, ndërsa *y,* mëditja e nxënësit. Me ndihmën e sistemit shënoji kushtet e mëposhtme:
- Mjeshtri ka punuar 15 ditë, kurse ndihmësi i tij 14 ditë.
- Mjeshtri për 4 ditë ka fituar 110 € më shumë sesa ndihmësi i tij për tri ditë.

Zgjidhje: $\begin{cases} 15x + 14y = 627 \\ 4x = 3y + 110 \end{cases}$

8. Le të jenë *x,* të ardhurat e punëtorit, ndërsa *y,* të ardhurat e ndihmësit të tij. Me ndihmën e sistemit shënoji kushtet e mëposhtme:
- Ekipi me 5 punëtorë dhe 2 ndihmës ka bërë për një punë të caktuar 2 260 €.
- Të ardhurat e secilit punëtor janë për 130 € më të mëdha sesa të ardhurat e një ndihmësi.

Zgjidhje: $\begin{cases} 5x + 2y = 2\ 260, \\ x = y + 130. \end{cases}$

5. ZGJIDHJA GRAFIKE E SISTEMIT TË DY EKUACIONEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- me anë të metodës grafike zgjidh sistemin e dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura;
- përvetëson se sistemi i dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura ose ka saktësisht një zgjidhje, ose ka pakufi zgjidhjesh, ose nuk ka zgjidhje.
- duke përdorur teoremën mbi pozitën reciproke të grafikeve të funksioneve lineare $y = k_1x + n_1$ dhe $y = k_2x + n_2$, pa vizatimin e grafikëve konstaton numrin e zgjidhjeve të sistemit të dhënë të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Qëllimi themelor i kësaj njësie mësimore është që duke kombinuar metodat grafike dhe metodat e bazuara në teoremën mbi pozitën reciproke të grafikëve të ekuacioneve lineare të konstatohet numri i mundshëm i zgjidhjeve të sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura. Ky është njëkohësisht edhe rasti që të përsëriten dituritë e arritura mbi grafikët e funksioneve lineare dhe në këtë mënyrë në realizimin e qëllimit të parashtruar të kyçen edhe nxënësit.

Arsimtari shënon në tabelë pyetjen:

Sa zgjidhje mund të ketë sistemi:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & \text{- grafiku: drejtëza } p, \\ a_2x + b_2y = c_2 & \text{- grafiku: drejtëza } s? \end{cases}$$

Pyetje: Çfarë është grafiku i ekuacionit linear me dy të panjohura dhe cilat pika e përbëjnë atë grafik?

Përgjigjja: Grafiku i funksionit linear është drejtëz. Asaj drejtëze i takojnë vetëm ato pika, koordinatat e të cilave janë zgjidhjet e ekuacionit linear.

- Arsimtari shton në tabelë shënimet "grafiku: drejtëza *p*" dhe "grafiku: drejtëza *s*".

Pyetje: Pra, koordinatat e pikave të drejtëzës *p* janë zgjidhjet e ekuacionit $a_1x + b_1y = c_1$, kurse koordinatat e drejtëzës *s* janë zgjidhjet e ekuacionit $a_2x + b_2y = c_2$. Koordinatat e pikave të përbashkëta të drejtëzave *p* dhe *s* (në qoftë se pikat e tilla ekzistojnë), janë zgjidhjet e përbashkëta të atyre ekuacioneve, d.m.th. zgjidhjet e sistemit të dhënë. Prandaj, përgjigjja në pyetje, nëse sistemi ka zgjidhje apo jo, varet nga pozita reciproke e drejtëzave *p* dhe *s*. Cila është pozita reciproke e drejtëzave *p* dhe *s* në rrafsh?

Përgjigjja: Drejtëzat *p* dhe *s* ose kanë saktësisht një pikë të përbashkët, ose janë paralele, ose përputhen.

- Arsimtari vizaton në tabelë figurat 38, 39 dhe 40.

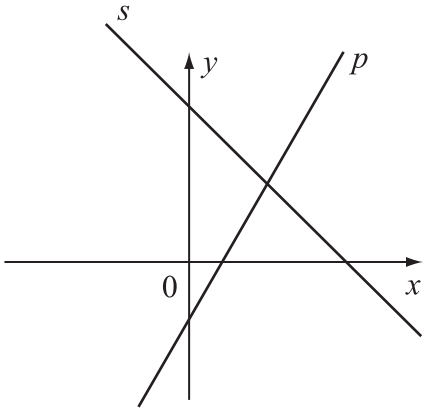


figura 38.

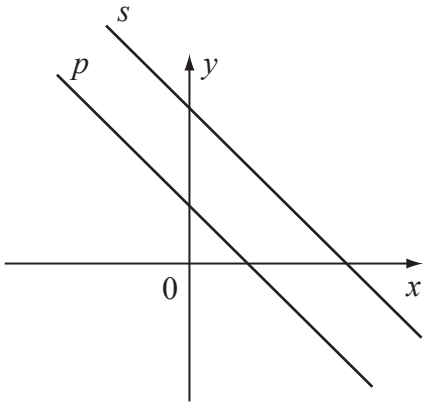


figura 39.

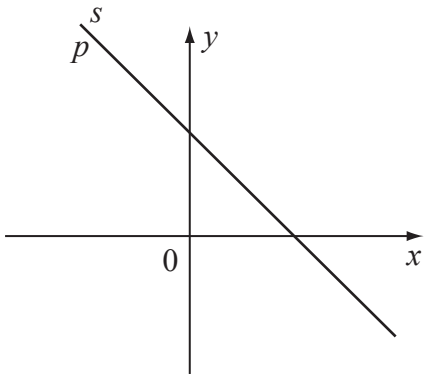


figura 40.

Arsimtari: Të rikujtojmë, koordinatat e pikave të përbashkëta të drejtëzave *p* dhe *s* (në qoftë se pika të tilla ka) janë zgjidhjet e sistemit të dhënë. Sa zgjidhje ka sistemi, në qoftë se realizohet situata e paraqitur në figurën 38?

Përgjigjja: Në qoftë realizohet situata e paraqitur në figurën 38 sistemi ka saktësisht një zgjidhje.

Pyetje: Çfarë është zgjidhja e sistemit në atë rast?

Përgjigjja: Zgjidhja e sistemit është çifti, të cilin e përbëjnë koordinatat e pikës, në të cilin priten drejtëzat *p* dhe *s*.

Pyetje: Sa zgjidhje ka sistemi, në qoftë se realizohet situata e paraqitur në figurën 39?

Përgjigjja: Në qoftë realizohet situata e paraqitur në figurën 39, sistemi nuk ka zgjidhje, sepse drejtëzat *p* dhe *s* nuk kanë pika të përbashkëta.

Arsimtari: Në fund të shqyrtojmë rastin në figurën 40. Në këtë rast drejtëzat *p* dhe *s* përputhen. Me fjalë të tjera, secila zgjidhje e ekuacionit $a_1x+b_1y=c_1$ është njëkohësisht zgjidhje e ekuacionit $a_2x+b_2y=c_2$ dhe anasjelltas, secila zgjidhje e ekuacionit $a_2x+b_2y=c_2$ është zgjidhje e ekuacionit $a_1x+b_1y=c_1$. Meqenëse ekuacionet lineare kanë pakufi zgjidhje, rrjedh se në rastin e paraqitur në figurën 40 sistemi ka pakufi zgjidhjesh. Bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është bashkësia e zgjidhjeve të cilitdo ekuacion të atij sistemi.

Tani mund të përgjigjemi në pyetjen e parashtruar në hyrje.

- Arsimtari shënon në tabelë:

Sistemi $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases}$ **ose ka saktësisht një zgjidhje, ose ka pakufi zgjidhjesh, ose nuk ka asnjë zgjidhje.**

- Arsimtari shënon në tabelë pyetjen e re:

Në ç'mënyrë, pa ndihmën e vizatimit, të tregohet se sa zgjidhje ka sistemi:

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ - grafiku: drejtëza *p*,
- grafiku: drejtëza *s*?

Arsimtari: T´u rikujtoj, drejtëza *p* dhe *s* janë grafikët e funksioneve lineare të përftuara duke zgjidhur ekuacionet e sistemit sipas të panjohurës.

- Arsimtari në tabelë shënon:

$y=k_1x+b_1$ - grafiku: drejtëza *p*,

$y=k_2x+b_2$ - grafiku: drejtëza *s*?

dhe formon tabelën

Koeficientet k_1 dhe k_2	Koeficientet n_1 dhe n_2	Pozita reciproke e drejtëzave *p* dhe *s*
$k_1 \neq k_2$	të çfarëdoshëm	Drejtëzat *p* dhe *s* priten. Sistemi ka një zgjidhje
$k_1 = k_2$	$n_1 \neq n_2$	Drejtëzat *p* dhe *s* janë paralele. Sistemi nuk ka zgjidhje.
$k_1 = k_2$	$n_1 = n_2$	Drejtëzat *p* dhe *s* përputhen. Sistemi ka pakufi zgjidhje.

Fushat në të cilat flitet mbi raportin reciprok të drejtëzave *p* dhe *s* dhe mbi mundësinë e zgjidhjes së sistemit, duhet të plotësohen vetëm kur në dialog me nxënësit të përsëriten pohimet mbi pozitën reciproke të grafikëve të funksioneve lineare $y=k_1x+n_1$ dhe $y=k_2x+n_2$ në varësi të koeficienteve k_1, k_2, n_1 dhe n_2 (Teksti, faqe 51 – 52).

- Shembulli i sistemit që ka një zgjidhje. Vizatimi i grafikut nuk duhet ta bëjë detyrën më të vështirë.

Pyetje: Të zgjidhen ekuacionet e sistemit sipas të panjohurës $\begin{cases} x+2y=8 \\ x+y=5 \end{cases}$ Sa zgjidhje ka sistemi?

Vizatoni grafikët e ekuacioneve të atij sistemi dhe përcaktoni zgjidhjen e tij. Të ju ndihmojmë, drejtëza *p* kalon nëpër pikat *A*(4,2) dhe *B*(0,4), kurse drejtëza *s* nëpër drejtëzat *C*(3,2) dhe *D*(1,4) (shembulli 4.3, Teksti, faqe 67).

- Shembull sistemi që nuk ka zgjidhje.

Pyetje: Ekuacionet e sistemit $\begin{cases} x+2y=8 \\ 8x+16y=16 \end{cases}$ të zgjidhen sipas të panjohurës *y*. Sa zgjidhje ka sistemi?

Vizatoni grafikët e ekuacioneve të atij sistemi. T'u ndihmojmë, drejtëza *p* kalon nëpër pikat *A*(4,2) dhe B(0,4), kurse drejtëza *s* nëpër pikat *C*(0,1) dhe *D*(2,0) (shembulli 4.3,Teksti, faqe 67).

- Shembulli i sistemit që ka pakufi zgjidhjesh.

Pyetje: Ekuacionet e sistemit $\begin{cases} x+2y=8 \\ 8x+16y=64 \end{cases}$ të zgjidhen sipas të panjohurës *y*. Sa zgjidhje ka sistemi?

Vizatoni grafikët e ekuacioneve të atij sistemi. Përcaktoni bashkësinë e zgjidhjeve të atij sistemi.

- Të japim edhe disa detyra të cilat, krahas detyrave në të cilat kërkohet që të zgjidhen sistemet e dhëna, duhet të përpunohen në orë.

1. Duke mos vizatuar grafikët, të tregohet sa zgjidhje kanë sistemet:

$$a)\begin{cases} x=6y-1, \\ 2x-10y=3; \end{cases} \quad b)\begin{cases} 12x-3y=5, \\ 6y-24x=-10; \end{cases} \quad c)\begin{cases} 3y+2x=1, \\ 4x+6y=-1. \end{cases}$$

2. Jepni tri zgjidhje të çfarëdoshme të sistemit:

$$a)\begin{cases} x-3y=5, \\ 3x-9y=15; \end{cases} \quad b)\begin{cases} 1,5y+x=-0,5, \\ 2x+3y=-1. \end{cases}$$

3. Vërtetoni se drejtëzat $x+y=5$, $2x-y=16$ dhe $x+2y=3$ priten në një pikë.

Udhëzim. Përcaktoni grafikisht koordinatat e pikës së prerjes së dy drejtëzave të para, pastaj vërtetoni se nëpër atë pikë kalon edhe drejtëza e tretë.

4. Përcaktoni vlerën e kufizës së lirë c në mënyrë që drejtëzat $5x-2y=3$ dhe $x+y=c$ të priten në një pikë që i takon boshtit *y*.

5. Përcaktoni vlerën e koeficientit *a* në mënyrë që drejtëzat $ax+3y=3$ dhe $x-2y=4$ të priten në një pikë që i takon boshtit *x*.

6. Përcaktoni vlerën e koeficientit *k* në mënyrë që drejtëza $y=kx-4$ të kalojë nëpër pikën e prerjes së drejtëzave $y=2x-5$ dhe $y=-x+1$.

6. ZGJIDHJA ALGJEBRIKE E SISTEMIT TË DY EKUACIONEVE LINEARE ME DY TË PANJOHURA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- njoftohet me mangësitë e zgjidhjes grafike të sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura;
- përvetëson zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me metodën e zëvendësimit;
- përvetëson zgjidhjen e sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me metodën e koeficienteve të kundërta.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Si hyrje në njësitë mësimore kushtuar metodës së zëvendësimit dhe metodës së koeficienteve të kundërta duhet të tregohet mbi mangësitë e zgjidhjes grafike të sistemit. Kjo gjë arrihet më mirë duke zgjedhur shembuj të thjeshtë, në të cilët nuk është e mundshme të përcaktohen koordinatat e pikës në të cilat priten grafikët e ekuacioneve lineare që formojnë atë sistem. Një sistem i tillë është $\begin{cases} 2x+y=2 \\ x+4y=4 \end{cases}$ (Teksti, faqe 70). Duhet të theksohet se në algjebër janë zhvilluar metodat që mundësojnë zgjidhjen e çdo sistemi të dy ekuacioneve lineare me dy të panjohura. Nxënësve u duhet thënë gjithashtu se në orët mësimore do të shqyrtohen dy metoda të tilla, metoda e zëvendësimit dhe metoda e koeficienteve të kundërta dhe se karakteristika e përbashkët e atyre metodave është fakti se me zbatimin e tyre, sistemi standard transformohet në sistem ekuivalent, në të cilin njëri prej ekuacioneve është ekuacion linear me një të panjohur. Ky është motivi që të futet në përdorim nocioni i sistemeve ekuivalente (Teksti, Faqe 70) dhe të shqyrtohen mënyrat e zgjidhjeve të sistemeve në të cilat njëra prej ekuacioneve është ekuacion linear me një të panjohur. Në shembujt që shqyrtohen, vargjet e sistemeve ekuivalente ilustrohen me anë të grafikëve

Nxënësit në fillim duhet të përvetësojnë zgjidhjet e sistemeve që kanë formën $\begin{cases} x=2 \\ x+4y=10 \end{cases}$ dhe $\begin{cases} y=3 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$

Sistemet e tilla janë hapi i fundit (i katërt) në procesin e zgjidhjes të sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me metodën e zëvendësimit dhe me metodën e koeficienteve të kundërta..

Arsimtari: Duhet të zgjidhet sistemi $\begin{cases} x=2 \\ x+4y=18 \end{cases}$. Në aspektin gjeometrik kjo domethënë që duhet të përcaktohet ordinata e pikës *A(2,y)*, nëpër të cilën kalon grafiku i ekuacionit $x+4y=18$ (figura 41).

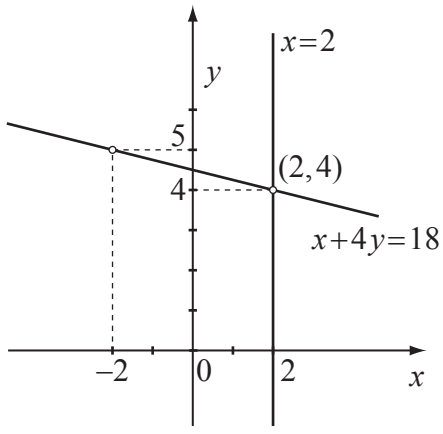


figura 41.

Ordinata e panjohur përcaktohet në mënyrën që vlera e abshisës së njohur $x = 2$ zëvendësohet në ekuacionin $x+4y=18$:

$$2+4y=18.$$

Në këtë mënyrë përftohet sistemi $\begin{cases} x=2 \\ 2+4y=18 \end{cases}$ që është i njëvlershëm me sistemin fillestar.

Ekuacioni i dytë i sistemit të fundit është ekuacion linear sipas të panjohurës y. Zgjidhja e tij është $y = 4$. Kështu kemi formuar vargun e tri sistemeve ekuivalente:

$$\begin{cases} x = 2, \\ x + 4y = 18, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ 2 + 4y = 18, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 4. \end{cases}$$

Nga këtu rrjedh se $x = 2,\ y = 4$ janë zgjidhjet e sistemit të dhënë. Provoni. Grafikët e sistemit të parë dhe sistemit të fundit janë paraqitur në figurat 41 dhe 42.

• Duke vizatuar këta grafikë jepet interpretimi gjeometrik i formimit të vargut të sistemeve ekuivalente dhe kjo u duhet thënë nxënësve.

• Nxënësit zgjidhin sistemin $\begin{cases} y = 3 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$.

• Hapi i ardhshëm në përgatitjen për metodën e zëvendësimit dhe metodën e koeficienteve të kundërta është zgjidhja e sistemeve në të cilat njëri prej ekuacioneve (cilido) është ekuacion linear me një të panjohur (cilëndo). Sistemet e tilla janë hapi i fundit (hapi i tretë) në procesin e zgjidhjes së sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura me metodën e zëvendësimit.

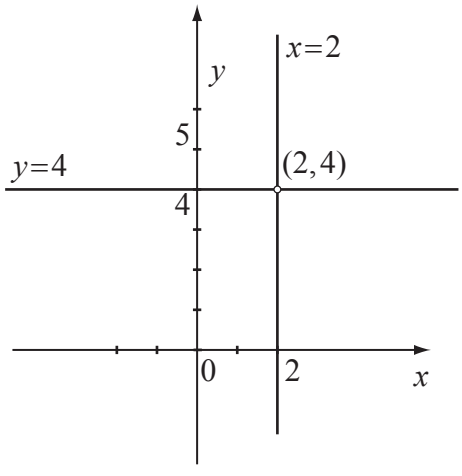


figura 42.

Arsimtari: Duhet të zgjidhet sistemi $\begin{cases} 4 + y = 5 \\ x + y = 5 \end{cases}$ (shembulli 5.2, Teksti, faqe 71). Ekuacioni i parë i sistemit është ekuacion linear me një të panjohur. Zgjidhja e tij është $y = 1$. Sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin $\begin{cases} y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$ të përftuar ashtu që ekuacioni i parë është zëvendësuar me ekuacionin ekuivalent $y = 1$. Keni mësuar si njësohen sistemet e tilla. Duke zëvendësuar vlerën $y = 1$ në ekuacionin e dytë të sistemit të fundit përftojmë sistemin $\begin{cases} y = 1 \\ x + 1 = 5 \end{cases}$ i cili është gjithashtu ekuivalent me sistemin e dhënë. Ekuacioni i dytë në atë sistem është ekuacion linear me një të panjohur dhe zgjidhja e tij është $x = 4$. Kështu është formuar vargu i sistemeve ekuivalente:

$$\begin{cases} 4 + y = 5, \\ x + y = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ x + y = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ x + 1 = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1, \\ x = 4. \end{cases}$$

Zgjidhja e sistemit të fundit është dhënë në mënyrë të drejtpërdrejtë:

$x = 4$ dhe $y = 1$.

Ai çift është njëkohësisht zgjidhja e sistemit të dhënë. Grafikët e sistemit të dytë dhe të katërt janë dhënë në figurat 43 dhe 44.

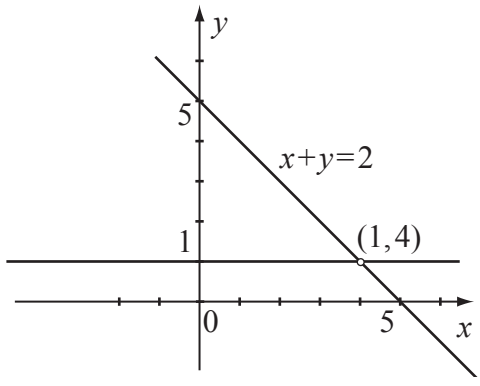


figura 43.

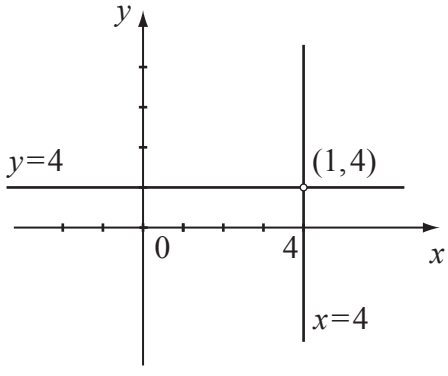


figura 44.

• Nxënësit zgjidhin sisteme të ngjashme.

Hapi i dytë në procesin e zgjidhjes së sistemit të ekuacioneve lineare me dy të panjohura është zgjidhja e

sistemit në të cilin njëri nga ekuacionet (cilido) ka formën $y = ax + b$ ose $x = py + q$.

Arsimtari: Duhet të zgjidhet sistemi $\begin{cases} y = x + 2 \\ -3x + y = -4 \end{cases}$. Në qoftë se në këtë sistem të panjohurën y në ekuacionin e dytë e zëvendësojmë me shprehjen $x + 2$ që ndodhet në anën e djathtë të ekuacionit të parë, do

të përftohet sistemi $\begin{cases} y = x + 2 \\ -3x + x + 2 = -4 \end{cases}$. Duke rregulluar ekuacionet e sistemit të fundit gjithashtu përftojmë sistemin ekuivalent $\begin{cases} y = x + 2 \\ -2x + 2 = -4 \end{cases}$. Zgjidhja e ekuacionit të dytë të këtij sistemi është $x = 3$. Në këtë mënyrë përftojmë sistemin e ardhshëm ekuivalent në varg $\begin{cases} y = x + 2 \\ x = 3 \end{cases}$. Duke zëvendësuar vlerën $x = 3$ në ekuacionin e parë të sistemit përftojmë sistemin e fundit ekuivalent $\begin{cases} y = 5 \\ x = 3 \end{cases}$. Në këtë mënyrë është formuar vargu i sistemeve ekuivalente:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ -3x + y = -4 \end{cases}, \begin{cases} y = x + 2 \\ x = 3 \end{cases}, \begin{cases} y = 5 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Grafikët e këtyre sistemeve janë paraqitur në figurat 45, 46 dhe 47.

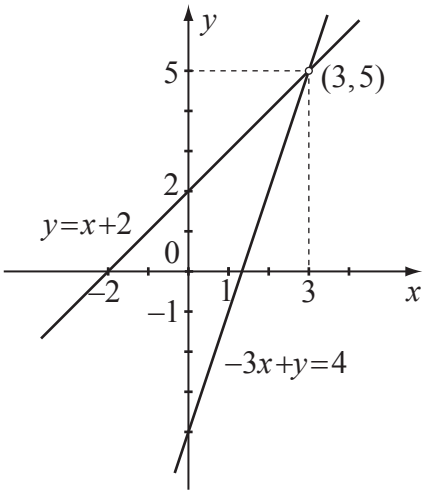


figura 45.

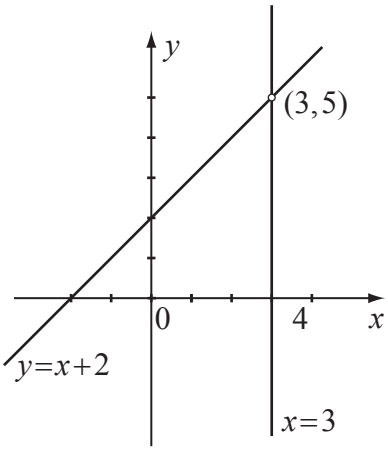


figura 46.

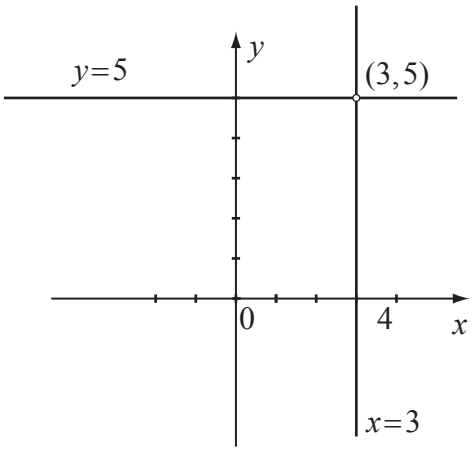


figura 47.

Zgjidhja e sistemit të dhënë është çifti (3,5).

- Nxënësit zgjidhin detyra të ngjashme.

Nxënësit që zgjidhin me sukses sistemet e ngjashme me ato të lartpërmendurat, do të përvetësojnë lehtë metodën e zëvendësimit dhe metodën e koeficienteve të kundërta. Esenca e atyre metodave përvetësohet duke zgjidhur shembuj konkretë dhe ajo është ilustruar në Tekst me shembujt 5.4 – 5.11 (Teksti, faqe 72 – 76).

Nxënësve duhet t'u tërhiqet vëmendja që gjatë zbatimit të metodës së zëvendësimit të jenë racionalë në zgjedhjen e ekuacionit dhe të panjohurës sipas të cilës do të zgjidhin ekuacionin. Nga kjo shpeshherë varet edhe kompleksi i transformimeve që duhen kryer në procesin e zgjidhjes.

1. VETITË KRYESORE TË PIKAVE, DREJTËZAVE DHE RRAFSHEVE. PËRCAKTUESHMËRIA E RRAFSHIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson vetitë kryesore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve;
- përvetëson teoremën sipas të cilës drejtëza, që me rrafshin ka dy pika të përbashkëta, shtrihet mbi atë rrafsh;
- përvetëson teoremën sipas të cilës ekzistojnë pakufi rrafshe që kalojnë nëpër drejtëzën e dhënë;
- përvetëson teoremën sipas të cilës ekziston saktësisht një rrafsh që kalon nëpër tri pika jokolineare;
- përvetëson teoremën sipas të cilës dy drejtëza të ndryshme që priten përcaktojnë një rrafsh;
- zgjidh detyra të thjeshta në të cilat zbatohen vetitë kryesore dhe teoremat e përmendura.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Nxënësit në klasat e mëparshme janë takuar kryesisht me figura, pikat e të cilave i takojnë një rrafshi të dhënë. Prandaj në pjesën hyrëse të orës duhet t'u theksohet:

1) çfarë janë figurat hapësinore;
2) çfarë është stereometria;
3) cilat figura i quajmë figura themelore hapësinore;
4) cilat janë qëllimet e hulumtimit të stereometrisë;
5) si realizohen ato qëllime.

Figurat, pikat e të cilave nuk i takojnë një rrafshi, do t'i quajmë **figura hapësinore.**

Stereometria është pjesë e gjeometrisë në të cilën hulumtohen vetitë e figurave hapësinore.

Figurat themelore hapësinore janë pika, drejtëza dhe rrafshi.

Drejtëzën e mendojmë si segment që mund të zgjatet në mënyrë të pakufizuar në të dy drejtimet, kurse rrafshin si pjesë të rrafshët të tavolinës i cili mund të zgjatet në mënyrë të pakufizuar në të gjitha drejtimet. Prandaj drejtëzat i vizatojmë si segmente, kurse rrafshet si paralelograme. Në lidhje me vizatimin e figurave hapësinore duhet të komentohet edhe figura 1.1 (Teksti, faqe 82).

Qëllimet e hulumtimi të stereometrisë janë nocionet dhe raportet themelore dhe kuptimi i gjeometrisë si shkencë, në të cilën saktësia e shprehjeve mbi vetitë e figurave tregohet me anë të procesit që quhet vërtetim, i cili kryhet sipas rregullave të caktuara.

Këto qëllime realizohen duke zgjidhur detyra. Një numër i detyrave përdoret gjatë zgjidhjes së një numri të madh të detyrave të tjera. Detyrat e tilla i konsiderojmë të rëndësishme dhe i quajmë **teorema**. Në teorema dhe detyra pohohet diçka mbi vetitë e figurave hapësinore.

Si e dimë se ato pohime janë të vërteta?

A është e mjaftueshme që të pranohet saktësia e pohimit sipas të cilit përmesoret e brinjës së trekëndëshit priten në një pikë, vetëm në bazë të figurës (vizatimit), në të cilën pohohet një gjë e tillë?

Ekzistojnë arsye serioze për shkak të cilave figura nuk mund të pranohet si vërtetim i saktësisë së pohimeve gjeometrike. Domethënë, vetitë e figurave gjeometrike realizohen në pakufi mënyra. Për shembull, ekzistojnë pakufi trekëndësha dhe për secilin prej tyre mund të parashtrohet pyetja, a priten në një pikë përmesoret e brinjëve të tij. Nuk mund të përfshihen të gjitha rastet në figura. Si të verifikohet a priten përmesoret e brinjëve të trekëndëshit, brinjët e të cilit kanë, sipas radhës, gjatësitë e barabarta me distancat ndërmjet Tokës dhe Hënës, Tokës e Marsit dhe Marsit e Hënës? Një trekëndësh i tillë nuk mund të vizatohet.

Prandaj në gjeometri pohimet vërtetohen. Vërtetimi nënkupton një varg konkludimesh, qëllimi i të cilave është që të bindemi në saktësinë e pohimit që e vërtetojmë.

Si bazë për vërtetimin e çdo pohimi nga stereometria merren këto të ashtuquajtura **veti themelore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve:**

Vetia 1. Ekziston saktësisht një drejtëz *p* që kalon nëpër dy pika të ndryshme A dhe B.

Vetia 2. Në qoftë se dy rrafshe të ndryshme α dhe *β* kanë pikën e përbashkët A, atëherë ato rrafshe kalojnë nëpër drejtëzën (le ta shënojmë me *p*) që përmban pikën A. Rrafshet *α* dhe *β* nuk kanë pika të tjera të përbashkëta përveç pikave të drejtëzës *p*.

Vetia 3. Në qoftë se pika A nuk i takon drejtëzës *p*, atëherë ekziston saktësisht një rrafsh *α* që përmban pikën A dhe drejtëzën *p*.

Vetia 4. Nëpër pikën A që nuk i takon drejtëzës *p* mund të tërhiqet saktësisht një drejtëz *s* paralele me drejtëzën *p*. Drejtëza *s* i takon rrafshit të përcaktuar me pikën A dhe drejtëzën *p*.

Themeli i gjeometrisë si shkencë qëndron në rregullën e mëposhtme:

Si të vërteta konsiderohen vetëm ato pohime, vërtetimet e të cilave bazohen ekskluzivisht në vetitë themelore të pikave, drejtëzave e rrafsheve dhe në ato pohime që janë vërtetuar më herët në këtë mënyrë.

Nxënësve me siguri duhet t'u sqarohet kuptimi i vetisë themelore 2. Në gjuhën e bashkësive vetia 2 ka këtë domethënie:

Në qoftë se $\alpha \cap \beta \neq \varnothing$ (d.m.th. në qoftë se rrafshet *α* dhe *β* kanë së paku një pikë të përbashkët) atëherë $\alpha \cap \beta = p$ (atëherë prerja e tyre është një drejtëz).

Në pajtim me këtë, në qoftë se rrafshet *α* dhe *β* kanë pika të përbashkëta *A, B, C*, ... atëherë ato rrafshe kalojnë nëpër drejtëzën që i përmban ato pika dhe rrafshet *α* dhe *β* nuk kanë pika të tjera të përbashkëta përveç pikave të asaj drejtëze.

Si t'u ligjërohet gjeometria nxënësve të klasës së nëntë të shkollës fillore?

Në tekstet, në të cilat mësimi fillestar i gjeometrisë paraqitet në nivel më të komplikuar sesa është paraqitur në Tekstin tonë, krahas aksiomave të planimetrisë dhe aksiomave 1 - 4 (ose të disa pohimeve ekuivalente me to), doemos kyçen edhe aksiomat e mëposhtme:

a) Për çdo drejtëz ekzistojnë pikat që i takojnë asaj drejtëze dhe pikat që nuk i takojnë asaj drejtëze.

b) Për çdo rrafsh ekzistojnë pikat që i takojnë dhe pikat që nuk i takojnë atij rrafshi.

Që të evitojmë formalizmin e tepruar dhe duke u bazuar shpeshherë në "qartësinë" që e sugjeron figura, ne ato aksioma nuk i kemi marrë parasysh. Kështu, për shembull, gjatë vërtetimit të teoremës 1 (Teksti, faqe 83) në mënyrë implicite zbatojmë aksiomën *a*). Themelimi aksiomatik i gjeometrisë, edhe pse i rëndësishëm për matematikën, nuk ka as përafërsisht aq rëndësi për qëllimet që dëshirojmë t'i realizojmë duke ligjëruar gjeometrinë nxënësve të klasave të larta të shkollës fillore. Sidoqoftë, kemi dëshiruar që të paktën në një nivel t'u paraqesin nxënësve gjeometrinë (në këtë rast stereometrinë) si shkencë deduktive, e jo si bashkësi figurash në bazë të të cilave nxirren përfundimet e caktuara.

Është vështirë të gjendet kufiri ndërmjet ligjërimit tepër të thjeshtuar dhe tepër formal të gjeometrisë në atë nivel arsimimi. Të kthehemi tek orët hyrëse të gjeometrisë.

Si rrjedhim i drejtpërdrejtë i vetisë 2 mund të zgjidhni detyrat 1.6 dhe 1.7 (Përmbledhja, faqe 42).

Nxënësit duhet të përpunojnë në shtëpi detyrat 1.2 -1.4 (Përmbledhja).

Në kuadër të kësaj njësie mësimore duhet të përpunohen pohimet:

1. (Teksti, faqe 83) **Në qoftë se dy pika *B* dhe *C* të drejtëzës *p* i takojnë rrafshit *α*, atëherë edhe drejtëza *p* i takon rrafshit *α*.**

2. (Teksti, faqe 83) **Ekzistojnë pakufi rrafshe që përmbajnë drejtëzën e dhënë.**

Gjatë futjes në përdorim të nocioneve të reja si dhe gjatë formulimit të teoremave të reja, rol shumë të rëndësishëm ka një fakt që në matematikë quhet **motivacion**. Në ndryshim, për shembull, nga analiza matematike, ku motivacioni mund të gjendet jashtë analizës (në gjeometri, fizikë, teknikë e kështu me radhë, në gjeometri jemi shpeshherë të detyruar të përdorim të ashtuquajturin motivacion të brendshëm logjik. Fjala është mbi procesin që përbëhet në atë që gjatë hulumtimit të vetive të figurave, nxënësve t'u parashtrohen pyetje, të cilat çojnë drejt përfundimeve të caktuara. Duke parashtruar pyetjet e këtilla vihet deri te formulimi i teoremave që dëshirojmë t'i vërtetojmë dhe motivohen hapat e caktuar në vërtetim. Ana pozitive e kësaj qasjeje është dialogu aktiv me nxënësit. Sidoqoftë në këtë nuk duhet tepruar. Nxënësve gjithsesi duhet t'u sigurohet koha (jo vetëm në shtëpi, por edhe në klasë) për analizën e problemit të caktuar dhe për nxjerrjen e përfundimeve në mënyrë të pavarur.

Marrim, për shembull, teoremën 1. Në ç' mënyrë t'u ofrohet nxënësve teorema, që ta pranojnë atë si përgjigje në pyetjen që parashtrohet në mënyrë logjike?

Po japin një propozim i cili na duket i përshtatshëm.

Në pjesën hyrëse të orës duhet të parashtrohet pyetja:

Si verifikohet, nëse një drejtëz *p* shtrihet në një rrafsh *α*? A jemi të detyruar që të verifikojmë nëse çdo pikë e asaj drejtëze i takon rrafshit *α*, ose nëse për një verifikim të tillë mjafton ta bëjmë për një numër të caktuar pikash? Është e volitshme që një numër i atyre pikave të jetë sa më i vogël, natyrisht, në qoftë se pika të tilla ekzistojnë.

Të përpiqemi me një pikë.

Drejtëza *p,* që me rrafshin *α* ka saktësisht një pikë të përbashkët, a i takon atij rrafshi apo jo?

Duke analizuar raportet reciproke të brinjëve të mureve të klasës dhe duke vizatuar figurën përkatëse, nxënësit nxjerrin përfundimin se në atë rast drejtëza *p* nuk i takon rrafshit *α*.

Tani të provojmë me dy pika.

Shumica e nxënësve me siguri do të pohojë se në këtë rast drejtëza *p* i takon rrafshit *α*.

Si formulohet pohimi përkatës?

Pas disa përpjekjesh bëhet formulimi i tij:

Në qoftë se dy pika *B* dhe *C* të drejtëzës *p* i takojnë rrafshit α, atëherë edhe drejtëza *p* i takon rrafshit α.

Si ta vërtetojmë këtë teoremë, duke përdorur vetëm vetitë themelore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve?

▲Para së gjithash na nevojitet një rrafsh që përmban drejtëzën *p*. Deri tani dimë vetëm një mënyrë të përcaktimit të rrafshit. Është fjala për vetinë 3. Zbatimi i kësaj vetie nënkupton se kemi një pikë që nuk i takon drejtëzës *p*. Le të marrim një pikë të tillë dhe le ta shënojmë me *A*, kurse me *β* shënojmë rrafshin e përcaktuar me atë pikë *A* dhe drejtëzën *p*. Në qoftë se kemi pasur fat, dhe rrafshi *β* është përputhur me rrafshin *α*, atëherë teorema është vërtetuar, sepse drejtëza *p* si drejtëz e rrafshit *β* i takon rrafshit *α*.

Çfarë do të ndodhë, në qoftë se rrafshet *α* dhe *β* nuk përputhen, d.m.th. në qoftë se është fjala mbi dy rrafshe të ndryshme.

Në atë rast kemi dy rrafshe të ndryshme të tilla që kanë dy pika të përbashkëta *B* dhe *C*.

Çfarë mund të përfundojmë tani në bazë të vetisë 2?

Sipas vetisë 2, rrafshet *α* dhe *β* priten nëpër një drejtëz *s* që kalon nëpër ato pika. Pra, drejtëza *s* përveç se i takon rrafshit *α*, kalon nëpër pikat *B* dhe *C*. Edhe drejtëza *p* kalon nëpër pikat *B* dhe *C*. Sa drejtëza kalojnë nëpër dy pika të ndryshme *B* dhe *C*? Çfarë mund të përfundojmë në bazë të vetisë 1?

Sipas vetisë 1 ekziston saktësisht një drejtëz që kalon nëpër dy pika të ndryshme.

Nga këtu rrjedh se drejtëza *p* përputhet me drejtëzën *s* dhe si e tillë i takon rrafshit *a*, me çfarë u vërtetua teorema.

▲ Kur nxënësve u jepet për detyrë shtëpie detyra 1.12, një pjesë e tyre këtë detyrë e përjeton si një obligim të pakëndshëm. Ndoshta interesimi do të jetë më i madh, në qoftë se gjatë orës komentohen pyetjet që parashtrohen në ato detyra.

Për shembull:

Drejtëza *p* dhe pika *A* përcaktojnë rrafshin (vetia 3) që do ta quajmë me *α*. Vini re drejtëzat që kalojnë nëpër pikën *A* dhe e presin drejtëzën *p*. Detyra juaj në shtëpi është që të zgjidhni detyrën 1.12 (Përmbledhje, faqe 42) në të cilën do të tregoni raportin e rrafshit *α* dhe atyre drejtëzave. Ajo detyrë zgjidhet duke bërë zbatimin e drejtpërdrejtë të teoremës 1.

Më herët kemi cekur se në cilat kushte drejtëza *p* i takon rrafshit.

Sa rrafshe të ndryshme ekzistojnë që përmbajnë drejtëzën *p* ?

Në cilëndo mënyrë që të reagojnë nxënësit në këtë pyetje, nuk është vështirë të mendohen pyetjet dhe të bëhet ai dialog me nxënësit, i cili do të sjellë deri te përfundimi se ekzistojnë pakufi rrafshe të tilla.

Arsimtari në tabelë shënon teoremën 2. Si hyrje në vërtetim mund të shërbejnë pyetjet:

Si të vërtetojmë këtë teoremë, duke përdorur ekskluzivisht vetitë themelore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve?

Si të vërtetohet, para së gjithash, se ekziston të paktën një rrafsh që përmban drejtëzën *p*? Çfarë përfundimi nxirret nga vetia 3?

Tani mund t'i qasemi vërtetimit të teoremës 2.

Të përmendim se ajo teoremë do të na nevojitet kur do të shqyrtojmë numrin e rrafsheve që kalojnë nëpër tri, gjegjësisht katër pika.

PËRCAKTUESHMËRIA E RRAFSHIT

Në qoftë se ekziston saktësisht një rrafsh që plotëson kushtet e caktuara, atëherë themi se ato kushte e përcaktojnë, gjegjësisht e përkufizojnë rrafshin α. Deri tani dimë vetëm një mënyrë të përcaktimit të rrafshit. Është fjala për vetinë themelore 3. Qëllimi, që dëshirojmë të realizojmë këtu janë edhe dy teorema mbi përcaktueshmërinë e rrafshit.

3. (Teksti, faqe 85) **Ekziston saktësisht një rrafsh që përmban tri pika jokolineare *A, B* dhe *C*.**

4. (Teksti, faqe 85) **Në qoftë se dy drejtëza të ndryshme *p* dhe *s* kanë pikën e përbashkët B, atëherë ekziston saktësisht një rrafsh që i përmban ato drejtëza.**

Si të gjejmë motivimin për teoremën e parë?

Të japim një propozim.

Katërkëndëshin e kemi përkufizuar si pjesë e rrafshit të kufizuar me një vijë të thyer të mbyllur të përbërë nga katër segmente. Çdo katër pika në rrafsh, tri pika të çfarëdoshme nga të cilat nuk i takojnë një drejtëze, janë kulmet e një katërkëndëshi (konveks apo jo konveks). Mirëpo, në hapësirë ekzistojnë katër pika ndër të cilat tri pika të çfarëdoshme nuk i takojnë të njëjtës drejtëz, mirëpo të cilat nuk janë kulmet e një katërkëndëshi (figura 48). Figura hapësinore në figurën 48 quhet katërkëndëshi hapësinor.

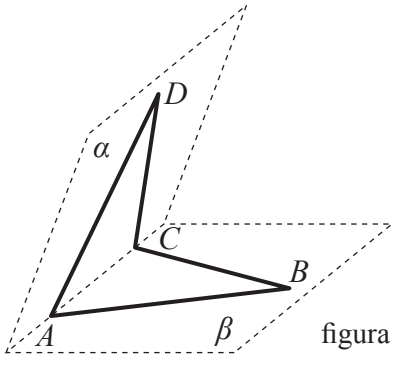


figura 48.

A ekzistojnë trekëndësha hapësinorë?

Të sqarojmë pak këtë pyetje.

Trekëndëshin e kemi përkufizuar si **pjesë e rrafshit** të kufizuar me vijën e thyer dhe të mbyllur të përbërë nga tri segmente. Pra, si edhe në rastin e katërkëndëshit, kur përkufizojmë trekëndëshin kërkojmë që ajo figurë të jetë **pjesë e rrafshit**. Të mendojmë tani në hapësirë tri pika të çfarëdoshme jokolineare *A*, *B* dhe *C*.

A janë pikat *A, B* dhe *C* kulmet e një trekëndëshi, d.m.th. a ekziston rrafshi që i përmban ato pika?

Ndoshta nxënësit do të jenë të të njëjtit mendim se rrafshi i tillë ekziston. Ndoshta do të ketë edhe nxënës që do të pohojnë të kundërtën. Në çdo rast, arsimtari rikujton se nganjëherë tavolinat dhe karriget ndërtohen nga tri këmbë, çfarë pohon mendimin se për tri pika jokolineare ekziston rrafshi që i përmban ato. Në qoftë se pohimi është i saktë, atëherë mund të parashtrohet pyetja sa rrafshe të tilla ka.

Përvoja jonë dhe vizatimet tregojnë mbi teoremën e mëposhtme (Teksti, teorema 2):

1. Ekziston saktësisht një rrafsh që përmban tri pika jokolineare *A, B* dhe *C*.

Për vërtetimin e kësaj teoreme, krahas vetive themelore të pikave drejtëzave dhe rrafsheve, na nevojitet edhe teorema e mëposhtme (shembulli 1.2, Teksti, faqe 84):

2. Tri pika jokolineare *A, B* dhe *C* nuk mund t'u takojnë dy rrafsheve të ndryshme.

Ky është shembull tipik i teoremës gjeometrike, e cila vërtetohet me anë të metodës së ashtuquajtur sjellje në kundërthënie. Në Tekst kemi evituar mënyrën standarde të vërtetimit me anë të asaj metode, sepse ajo kërkon fjalinë "supozojmë të kundërtën". Një numër nxënësish mund të binden se duhen vërtetuar faktet që ai i "sheh" në vizatim. Mirëpo, të supozohet e kundërta e asaj që ai "sheh" në vizatim, për nxënësin është vështirë e pranueshme. Prandaj në Tekst, në vend të vërtetimit të pohimit $p \Rightarrow q$ me metodën standarde sjellje në kundërthënie, zakonisht kemi vërtetuar drejtpërdrejt pohimin $\neg q \Rightarrow \neg p$ dhe kështu kemi evituar fjalinë e përmendur. Kështu në Tekst, në fillim kemi vërtetuar drejtpërdrejt teoremën (shembulli 1.1, Teksti faqe 84):

3. Tri pika që u takojnë dy rrafsheve të ndryshme janë kolineare.

Mbas kësaj rrjedh formulimi dhe vërtetimi i teoremës nga shembulli 1.2 (Teksti):

• **Tri pika jokolineare** *A, B* **dhe** *C* **nuk mund t'u takojnë dy rrafsheve të ndryshme.**

Vërtetim:

• Tri pika që u takojnë dy rrafsheve të ndryshme janë kolineare (shiko teoremën 3).

• Meqenëse pikat *A, B* dhe *C* janë jokolineare, ato nuk mund t'u takojnë dy rrafsheve të ndryshme.

Disa nxënës, nga teorema 2 mund të nxjerrin përfundimin e gabuar duke menduar kështu:

Meqenëse tri pika jokolineare nuk u takojnë dy rrafsheve të ndryshme, rrjedh se ato pika i takojnë një rrafshi. Si shembull se një mënyrë e tillë mendimi nuk sjell deri te përfundimi i vërtetë, mund të përmendni argumentin e mëposhtëm:

Topi i futbollit nuk u takon dy rrafsheve, mirëpo ky fakt nuk do të thotë se topi i takon një rrafshi. Pra, duhet të vërtetohet se ekziston rrafshi që përmban tri pika jokolineare. Kjo është hyrja në vërtetimin e teoremës 3

Sa rrafshe mund të kalojnë nëpër tri pika të dhëna *A, B* dhe *C*? Këtu mendohet në tri pika të çfarëdoshme.

Sipas teoremës paraprake ekziston saktësisht një rrafsh që kalon nëpër tri pika jokolineare *A, B* dhe *C*.

Sa rrafshe kalojnë nëpër tri pika jokolineare *A, B* dhe *C*? Në lidhje me këtë pyetje nxënësit zgjidhin detyrën 1.8 (Përmbledhja).

Për pikat e tilla ekziston drejtëza *p* që i përmban. E dimë se ekzistojnë pakufi rrafshe që kalojnë nëpër drejtëzën *p* (teorema 2). Çdonjëri prej atyre rrafsheve i përmban pikat *A, B* dhe *C*. Në çfarë manifestohet dallimi i rastit kur pikat *A, B* dhe *C* janë jokolineare nga rasti kur ato pika janë kolineare? Do të ishte e mirë sikur nxënësit vetë të përfundonin se kushtet e teoremës 2 garantojnë ekzistencën e **saktësisht një rrafshi** që përmban tri pika jokolineare *A, B* dhe *C*.

Sa rrafshe mund ta kalojnë nëpër katër pika *A, B, C* dhe *D*?

Të shqyrtojmë dy raste të mundshme:

a) pikat *A, B, C* dhe *D* i takojnë të njëjtit rrafsh,

b) pikat *A, B ,C* dhe *D* nuk i takojnë të njëjtit rrafsh.

Në rastin a) ekzistojnë:

a_1) pakufi rrafshe që kalojnë nëpër pikat *A, B, C* dhe *D*, në qoftë se ato pika i takojnë të njëjtës drejtëz (teorema 2, Teksti, faqe 83),

a_2) ekziston saktësisht një rrafsh që kalon nëpër pikat *A, B ,C* dhe *D,* nëse ato pika nuk i takojnë të njëjtës drejtëz (teorema 3, Teksti, faqe 85).

Ka mbetur rasti b), i cili shqyrtohet në detyrat 1.9, 1.10 dhe 1.11 (Përmbledhja, faqe 42). Këto detyra nxënësit duhet t'i punojnë në shtëpi.

Teorema 3 (Teksti, faqe 85) mund të formulohet edhe në mënyrën e mëposhtme:

Në qoftë se rrafshet α dhe β kanë tri pika jokolineare të përbashkëta, atëherë ato rrafshe përputhen.

Nga këtu rrjedh menjëherë se:

1. Vija rrethore e cila me rrafshin α ka tri pika të përbashkëta i takon atij rrafshi (Përmbledhja, faqe 42, detyra 1.14).

2. Paralelogrami që me rrafshin α ka tri pika të përbashkëta: dy kulmet e tij fqinje dhe pikën e prerjes së diagonaleve të tij, i takon atij rrafshi (Përmbledhja, faqe 42, detyra 1.15).

Paraprakisht nxënësit duhet të vizatojnë figurat që tregojnë se **nuk janë të vërteta pohimet**:

- Në qoftë se vija rrethore dhe rrafshi kanë dy pika të përbashkëta, atëherë vija rrethore i takon rrafshit (Përmbledhja, faqe 1.13).

- Në qoftë se paralelogrami dhe rrafshi kanë tri pika të përbashkëta: dy kulme të tij dhe pikën e prerjes së diagonaleve, atëherë paralelogrami i takon atij rrafshi (figura 49).

Të shqyrtojmë tani teoremën 4 (Teksti, faqe 85).

Jemi takuar deri tani me dy mënyra të përcaktimit të rrafshit. Rrafshi përcaktohet, në qoftë se janë të dhëna:

- një drejtëz e tij dhe një pikë e tij që nuk ndodhet në atë drejtëz (vetia 3).

- tri pika jokolineare të tij (teorema 3).

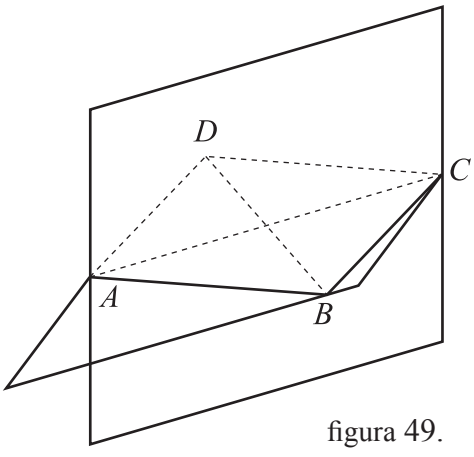


figura 49.

Kemi konstatuar më herët se një drejtëz nuk përcakton rrafshin (teorema 2, Teksti, faqe 83).

Sa drejtëza përcaktojnë rrafshin?

Nxënësit sigurisht do të reagojnë duke thënë se dy drejtëza përcaktojnë rrafshin.

Në qoftë se ndodh një gjë e tillë, atëherë duhet t'u tregohet figura 50. dhe të përfundohet se në hapësirë mund të gjenden drejtëzat për të cilat nuk ekziston rrafshi që i përmban.

Prandaj pyetjen "sa drejtëza përcaktojnë rrafshin" do ta zëvendësojmë me pyetjen:

Cilat janë ato dy drejtëza që përcaktojnë rrafshin?

Shpresojmë se do të ekzistojnë nxënës që do të vënë re se rrafshin e përcaktojnë:

- dy drejtëza që priten;
- dy drejtëza paralele.

Rastin e parë do ta shqyrtojmë tani, kurse rastin e dytë do ta shqyrtojmë më vonë.

Arsimtari vërteton teoremën 4. Nxënësit në shtëpi punojnë detyrat 1.16 dhe 1.17, të cilat zgjidhen duke zbatuar teoremën 3.

Shembullin 1.3 (Teksti, faqe 85) dhe figura 50 janë të rëndësishme. Këtu nxënësit herën e parë në mënyrë eksplicite kanë parasysh çiftin e drejtëzave që nuk i takojnë një rrafshi dhe nxjerrin përfundimin se drejtëzat e tilla nuk kanë pika të përbashkëta.

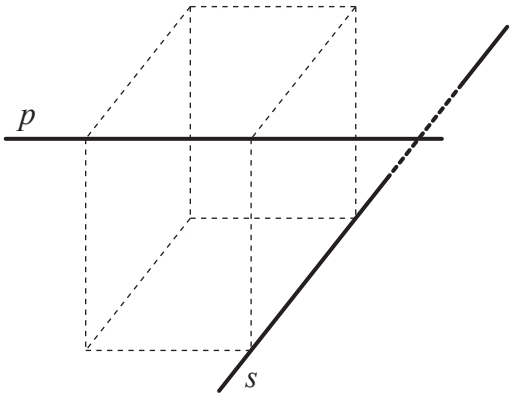


figura 50.

2. POZITA RECIPROKE E PIKAVE, DREJTËZAVE DHE E RRAFSHEVE NË HAPËSIRË. NDËRTIMI I DREJTËZAVE DHE I RRAFSHEVE

POZITA RECIPROKE E DY DREJTËZAVE NË HAPËSIRË

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson pozitat e mundshme reciproke të dy drejtëzave në hapësirë;
- përvetëson nocionet e drejtëzave paralele dhe tejkaluese;
- mëson që të vizatojë vizatime të thjeshta me të cilat ilustrohen pozitat reciproke të drejtëzave në hapësirë;
- përvetëson vetinë kryesore mbi drejtëzat paralele;
- përvetëson teoremën sipas të cilës të gjitha drejtëzat, që presin njërën prej dy drejtëzave që priten dhe janë paralele me drejtëzën tjetër, i takojnë të njëjtit rrafsh;
- përvetëson teoremën sipas të cilës dy drejtëza që janë paralele me drejtëzën e tretë janë paralele ndërmjet vete;
- zgjidh detyra të thjeshta teorike dhe konstruktive në lidhje me pozitat e mundshme reciproke të dy drejtëzave në hapësirë.

UDHËZIMET DIDAKTIKE

Kur fusim në përdorim nocionet siç janë drejtëzat tejkaluese, drejtëzat paralele, ortogonaliteti reciprok i drejtëzës dhe i rrafshit, këndi ndërmjet dy drejtëzave, këndi ndërmjet dy rrafsheve ose kur dëshirojmë të ilustrojmë disa raporte të tjera ndërmjet pikave, drejtëzave dhe rrafsheve, doemos duhet të përdoren modelet. Këtu para së gjithash, kemi parasysh kuboidin si figurë që nxënësit e takojnë shpeshherë në jetën e përditshme.

Raporti i pikave të dhëna *A, B, C*, … (drejtëzave të dhëna *p*, *s*, t,…) në njërën anë dhe të gjitha rrafsheve në anën tjetër, i karakterizojnë midis të tjerash edhe këto dy situata logjike të mundshme:

1. **Ekziston** rrafshi që përmban pikat e dhëna *A, B, C*, …(drejtëzat e dhëna *p*, *s*, *t*,…),
2. **Nuk ekziston** rrafshi që përmban pikat e dhëna *A, B, C*, …(drejtëzat e dhëna *p*, *s*, *t*,…).

Në rastin e parë flasim mbi pikat *A, B, C*, …(drejtëzat e dhëna *p*, *s*, *t*,…) **i takojnë rrafshit të dhënë,** kurse në rastin e dytë **nuk i takojnë rrafshit të dhënë.**

Nxënësit nganjëherë kushtin "pikat *A, B, C,*, …(drejtëzat *p*, *s*, *t*,…) nuk i takojnë të njëjtit rrafsh" e zëvendësojnë me kushtin "pikat *A, B, C*, …(drejtëzat *p*, *s*, *t*,…) u takojnë dy rrafsheve të ndryshme". Pikat A dhe B të paraqitura në figurën 51 u takojnë dy rrafsheve të ndryshme. Mirëpo ato pika i takojnë një rrafshi tjetër.

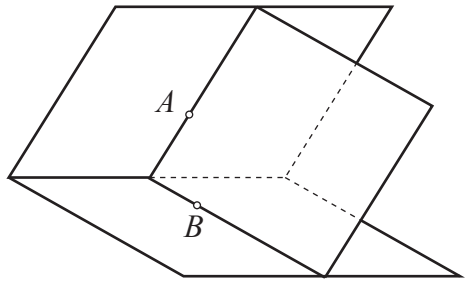


figura 51.

Kjo temë, krahas qëllimit që nxënësit të formojnë parafytyrimin mbi pozitën reciproke të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve, përmban edhe qëllimin që pozitat e shqyrtuara janë të **gjitha pozitat e mundshme logjike**.

Të fillojmë me raportin reciprok të dy drejtëzave. Si edhe në planimetri, nga vetia themelore 1 rrjedh se dy drejtëza të ndryshme në hapësirë, ose kanë saktësisht një pikë të përbashkët, ose nuk kanë pika të përbashkëta.

Mirëpo, në hapësirë, rasti i dytë lejon dy mundësi:

- drejtëzat i takojnë një rrafshi dhe
- drejtëzat nuk i takojnë një rrafshi.

Në rastin e parë, për dy drejtëza themi se janë paralele, kurse në rastin e dytë se janë tejkaluese.

A kanë pika të përbashkëta drejtëzat e tilla? Pritet se nxënësit e mirë kanë mësuar se drejtëzat e tilla nuk kanë pika të përbashkëta (shembulli 1.3, Teksti, faqe 85).

Arsimtari i numëron të gjitha pozitat e mundshme ndërmjet dy drejtëzave në hapësirë. Ky numërim duhet të përcillet me figura përkatëse. Nxënësit në modelin e paralelepipedit identifikojnë drejtëzat paralele, drejtëzat që priten dhe drejtëzat tejkaluese (detyrat 2.1-2.3, Përmbledhja, faqe 43). Drejtëza tejkaluese është nocion i pastër stereometrik dhe nevojitet në pjesën hyrëse të kësaj teme t'i përkushtohet një kujdes më i madh sesa drejtëzave paralele dhe drejtëzave që priten. Domethënë, pozitat e fundit ndërmjet drejtëzave nxënësit i kanë shqyrtuar shumë herë në klasat e përparshme. Përvetësimit të nocionit të drejtëzave tejkaluese me siguri duhet t'i kontribuojnë detyrat 2.4 -2.11 (Përmbledhja, faqe 43). Qëllimi i këtyre detyrave nuk është vetëm ky i fundit. Për kuptimin e raporteve hapësinore është shumë me rëndësi që nxënësit të dinë të ndërtojnë skicën me të cilën ilustrohen ato raporte.

Hapi i ardhshëm është përpunimi i shembujve 2.1 dhe 2.2 (Teksti, faqe 87). Në Tekst, pyetjet që zgjidhen në ata shembuj janë të motivuara me urën "Milenium" dhe kallëpit për ndërtimin e argjilës.

Në fazën e dytë të përpunimit të pozitës reciproke të drejtëzave në hapësirë, mjet i hulumtimit janë drejtëzat paralele (gjegjësisht vetia 4, Teksti, faqe 88). Këtu duhet theksuar se për shkak të ligjërimit të thjeshtuar për vetinë themelore 4, në të vërtetë kemi marrë teoremën. Domethënë, kjo veti mund të vërtetohet duke zbatuar aksiomat e planimetrisë mbi drejtëzat paralele.

Le të jenë p dhe s drejtëzat që priten në pikën A dhe α rrafshi i përcaktuar me ato drejtëza. Disa drejtëza paralele me drejtëzën p i takojnë rrafshit α, kurse disa të tjera nuk i takojnë. Si të konstatohet se cilat nga ato drejtëza i takojnë atij rrafshi dhe cilat nuk i takojnë? Mbi këtë çështje tregon teorema 5: (Teksti, faqe 22). **Le të jenë p dhe** s **drejtëzat që priten. Të gjitha drejtëzat që presin drejtëzën s dhe janë paralele me drejtëzën p, i takojnë një rrafshi të dhënë.**

Si konstatohet në stereometri se a janë dy drejtëza paralele?

Në ndryshim nga planimetria ku për një verifikim të tillë kemi në dispozicion kriteret e bazuara në krahasimin e këndeve në transversalë dhe në teoremën sipas të cilës dy drejtëza paralele me drejtëzën e tretë janë paralele ndërmjet veti, në stereometri mund të përdorim vetëm teoremën e fundit (teorema 4, Teksti, faqe 88). Veçohen, natyrisht pohimet që mund të sillen në raporte planimetrike.

Rrjedhim i drejtpërdrejtë i kriterit të paralelizmit është teorema sipas të cilës nuk ekziston drejtëza që është njëkohësisht paralele me dy drejtëza tejkaluese (shembulli 2.3, Teksti, faqe 88).

Kemi theksuar më herët rëndësinë e vizatimit të skicave me të cilat ilustrohen raportet reciproke të figurave hapësinore. Në këtë kontekst, për detyrë shtëpie propozojmë detyrat 2.8 -2.13 (Përmbledhja). Detyra 2.14 është interesante si detyrë e parë stereometrike që ka të bëjë me llogaritjen në Përmbledhje. Nxënësve doemos duhet t'u tërhiqet vëmendja në faktin se si një detyrë stereometrike është transformuar në një detyrë në rrafsh, çfarë ka mundësuar zbatimin e njohurive planimetrike të arritura më herët.

Zgjidhja e detyrave 2.15-2.19 nënkupton një vizatim të qartë dhe njohurinë e vetive kryesore të trapezit, paralelogramit dhe vijave të mesme të trekëndëshit.

NDËRTIMI I DREJTËZAVE DHE I RRAFSHEVE

Si bëhet ndërtimi i pikave, i drejtëzave dhe i rrafsheve në stereometri?

Për shembull, si në hapësirë, nëpër pikën e dhënë A që nuk i takon drejtëzës p të tërhiqet drejtëza paralele me drejtëzën p?

Arsimtari precizon se si bëhen ndërtimet e drejtëzave dhe rrafsheve që plotësojnë kushtet e caktuara. Si shembull zgjidh detyrën e përmendur. Detyrat konstruktive do të na shërbejnë si motivacion për konstatimin e disa vetive të rëndësishme të raporteve reciproke të drejtëzës dhe rrafshit, si dhe të raporteve reciproke të dy rrafsheve.

POZITA RECIPROKE E DREJTËZËS DHE E RRAFSHIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson pozitat e mundshme reciproke të drejtëzës dhe të rrafshit;
- përvetëson nocionin e drejtëzave në rrafsh;
- mëson të vizatojë vizatime të thjeshta me të cilat ilustrohet pozita reciproke e drejtëzës dhe e rrafshit;
- përvetëson teoremën sipas të cilës me rrafshin α janë paralele ato drejtëza që nuk i takojnë, dhe janë paralele me një drejtëz të atij rrafshi;
- përvetëson teoremën sipas të cilës rrafshi β që e pret rrafshin α dhe kalon nëpër drejtëzën p paralele me rrafshin α, e pret atë rrafsh nëpër drejtëzën paralele me drejtëzën p;
- i zgjidh disa detyra të thjeshta teorike dhe konstruktive në lidhje me pozitat e mundshme reciproke të drejtëzës dhe të rrafshit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Sa pika të përbashkëta mund të kenë rrafshi α dhe drejtëza p?

Të provojmë me dy pika.

Cili është raporti midis drejtëzës dhe rrafshit që me atë drejtëz ka dy pika të përbashkëta? Ne besojmë se ndonjë nxënësi do t'i kujtohet teorema 2 dhe në bazë të saj të përfundojë se në atë rast drejtëza p shtrihet në rrafshin α.

Pra, rrafshi α dhe drejtëza p që nuk shtrihet në atë rrafsh, nuk mund të kenë dy ose më shumë pika të përbashkëta.

Pra, sa pika të përbashkëta mund të kenë rrafshi α dhe drejtëza p që nuk shtrihet në atë rrafsh?

Rrafshi α dhe drejtëza p që nuk shtrihet në atë rrafsh ose kanë një pikë të përbashkët, ose nuk kanë pika të përbashkëta.

Arsimtari numëron të gjitha pozitat e mundshme reciproke të drejtëzave dhe të rrafsheve dhe përkufizon drejtëzat paralele në rrafsh. Këtë numërim duhet ta përcjellë vargu i figurave përkatëse. Nxënësit në modelin e paralelepipedit identifikojnë drejtëzat dhe rrafshet paralele, drejtëzat që nuk i takojnë një rrafshi të dhënë dhe drejtëzat e rrafshet që kanë saktësisht një pikë të përbashkët (detyrat 2.20 -2.24, Përmbledhja, faqe 44).

Komenti në lidhje me detyrat që nxënësi duhet t'i punojë në shtëpi.

a) Drejtëza p është paralele me rrafshin α. A është drejtëza p paralele me secilën drejtëz të atij rrafshi? Vizatoni figurën që e ilustron përgjigjen tuaj (detyra 2.25, Përmbledhja).

Kur është fjala mbi drejtëzat paralele nga fakti se drejtëzat p dhe s janë paralele me drejtëzën t rrjedh se edhe drejtëzat p dhe s janë paralele ndërmjet tyre. A janë pozitat reciproke të drejtëzave p dhe s të njëjta, në qoftë se ato drejtëza janë paralele me rrafshin α?

b) Drejtëzat p dhe s janë paralele me rrafshin α. A janë drejtëzat p dhe s paralele ndërmjet tyre? Vizatoni figurën që ilustron figurën tuaj (detyra 2.26, Përmbledhja). Detyra 2.27 është vazhdim i natyrshëm i detyrës 2.26. Mirëpo, ajo detyrë mund të përpunohet vetëm mbas teoremës 8.

a) Janë dhënë rrafshi α, drejtëza p paralele me atë rrafsh dhe drejtëza s paralele me drejtëzën p. Megjithëse në shikim të parë duket se drejtëza s duhet të jetë paralele me rrafshin α, kjo nuk është e vërtetë në përgjithësi. Përpunoni detyrën 2.18 dhe do të vini re të gjitha pozitat e mundshme të rrafshit α dhe drejtëzës s.

b) Nëpër pikën A që nuk ndodhet në drejtëzën p mund të tërhiqet saktësisht një drejtëz paralele me drejtëzën e dhënë. Sa drejtëza paralele me rrafshin α mund të tërhiqen nëpër pikën A që nuk shtrihen në atë rrafsh. Zgjidhni detyrën 2.29. dhe do të vini re të gjitha pozitat e mundshme të rrafshit α dhe të drejtëzave që kalojnë nëpër pikën A.

Si të verifikohet a është drejtëza p paralele me rrafshin α?

Në Tekst, këtë pyetje e kemi formuluar ndryshe, duke menduar se në atë trajtë nuk do të tërheqë vëmendjen e nxënësve. Megjithatë parashtrohet pyetja, në cilën mënyrë duhet të bindet nxënësi në kuptimin e teoremave ku shqyrtohen kushtet nën të cilat një drejtëz është paralele me një rrafsh të dhënë ? Këtë problem e kemi zgjidhur në Tekst ashtu që pyetjen e kriterit që drejtëza dhe rrafshi të jenë paralele e kemi vendosur në kontekst të zgjidhjes së detyrave të caktuara konstruktive.

Çfarë kemi parasysh saktësisht?

Nxënësit më herët kanë bërë një konstruktim (detyra konstruktive 1, Teksti, faqe 89) dhe dinë se çfarë domethënë të konstruktohen (ndërtohen) drejtëzat dhe rrafshet që plotësojnë kushtet e caktuara. Atëherë nxënësve do t'u zgjojnë interesim detyrat e mëposhtme:

1. Nëpër pikën A që nuk i takon rrafshit α të tërhiqet drejtëza paralele me atë rrafsh (detyra konstruktive 2, Teksti, faqe 90).

2. Pika A nuk u takon rrafsheve α dhe β që priten. Nëpër pikën A të tërhiqet drejtëza p paralele me drejtëzën s nëpër të cilën priten ato rrafshe (detyra konstruktive 3, Teksti, faqe 90).

3. Drejtëza p është paralele me rrafshin α. Nëpër pikën A të rrafshit α të tërhiqet drejtëza në atë rrafsh paralele me drejtëzën p (detyra konstruktive 4, Teksti, faqe 90).

Konstruksionet në detyrat 1 dhe 2 i mundëson teorema 7 (Teksti, faqe 90), kurse konstruksionet në detyrën 3, teorema 8 (Teksti, faqe 91).

Mbas vërtetimit (ose komentimit) të teoremës 7 bëhen konstruksionet 1 dhe 2.

Një gjë e tillë duhet të bëhet edhe me teoremën 8 dhe konstruksionin 3.

Kur në detyrat 2.30-2.32 nxënësit do të konstatojnë se saktësisht një prej brinjëve të paralelogramit, trapezit ose gjashtëkëndëshit të rregullt është paralele me rrafshin α, kurse brinjët e tjera e presin atë rrafsh, ata duhet të sqarojnë vetëm faktin e parë.

Detyrat 2.33-2.37 janë të shënuara me ngjyrë të kuqe si detyra të vështira. Megjithatë, duhet të tregohet se është fjala mbi detyrat në të cilat mbas një apo dy hapash duhet të zbatohet teorema e posa vërtetuar ose njëra prej vetive themelore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve.

POZITA RECIPROKE E DY RRAFSHEVE

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson pozitat reciproke të mundshme të dy rrafsheve;
- përvetëson nocionin e rrafsheve paralele;
- mëson të vizatojë vizatime të thjeshta me të cilat ilustrohet pozita reciproke e dy rrafsheve;
- përvetëson teoremën, sipas të cilës rrafshi γ i cili i pret rrafshet paralele α dhe β, i pret ato rrafshe nëpër drejtëzat paralele;
- përvetëson teoremën sipas të cilës segmentet paralele ndërmjet rrafsheve paralele janë të barabarta;
- përvetëson teoremën sipas të cilës me rrafshin α është paralel çdo rrafsh β që përmban dy drejtëza që priten dhe të cilat janë paralele me rrafshin α;
- i zgjidh detyrat e thjeshta teorike dhe konstruktive në lidhje me pozitën reciproke të mundshme të dy rrafsheve.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Në fund të kësaj teme shqyrtohet pozita reciproke e dy rrafsheve.

Dy rrafshe ose kanë, ose nuk kanë pika të përbashkëta.

Në qoftë se dy rrafshe kanë pika të përbashkëta, çfarë paraqet prerja e tyre?

Në qoftë se përgjigjja nuk përftohet menjëherë, arsimtari u rikujton nxënësve vetitë kryesore të pikave, drejtëzave dhe rrafsheve, në veçanti vetinë 2:

Në qoftë se dy rrafshe kanë pika të përbashkëta, atëherë ato rrafshe priten nëpër një drejtëz, e cila kalon nëpër pikat e përbashkëta dhe nuk kanë pika të tjera të përbashkëta përveç pikave të asaj drejtëze.

Prandaj, pozitën reciproke të dy rrafsheve të ndryshme e karakterizojnë dy mundësi:

- dy rrafshe priten nëpër një drejtëz;
- dy rrafshe nuk kanë pika të përbashkëta.

Arsimtari numëron të gjitha pozitat e mundshme reciproke të dy rrafsheve dhe përkufizon rrafshet paralele. Edhe këtu, këtë numërim duhet ta përcjellin figurat përkatëse. Nxënësit në modelin e paralelepipedit identifikojnë rrafshet paralele ndërmjet tyre dhe rrafshet që priten (detyrat 2.38 - 2.40, Përmbledhja, faqe 45). Si dhe në rastet e mëparshme, nga modeli duhet të kalohet gradualisht në vizatime. Këtij qëllimi mund t'i kontribuojnë detyrat 2.41 -2.44 dhe 2.48.

Në qoftë se dyshemenë dhe tavanin i kuptojmë si rrafshe paralele, mund të pyesim, nëse brinjët e mureve anësore nëpër të cilat ato presin dyshemenë dhe tavanin janë paralele apo jo.

Me fjalë të tjera, parashtrohet pyetja, nëse drejtëzat p dhe s, nëpër të cilat rrafshi γ i pret rrafshet paralele α dhe β janë paralele apo jo. Mbi një gjë të tillë flet shembulli 2.4 (Teksti, faqe 92).

Në klasën e shtatë është shqyrtuar teorema sipas të cilës segmentet paralele ndërmjet drejtëzave paralele janë të barabarta. Në mënyrë të natyrshme parashtrohet pyetja, nëse segmentet paralele ndërmjet rrafsheve paralele janë ta barabarta.

Teorema 9 (Teksti, faqe 92) tregon se përgjigjja në këtë pyetje është afirmative.

Si të verifikohet a janë rrafshet α dhe β paralele ndërmjet tyre?

Si edhe në rastin paraprak, pyetjen e kriterit të paralelizmit e kemi formuar si detyrë konstruktive.

Kemi mësuar se si nëpër pikën A tërhiqet drejtëza paralele me drejtëzën e dhënë, gjegjësisht me rrafshin e dhënë α.

Si të vendoset nëpër pikën A rrafshi paralel me rrafshin e dhënë α ?

Një konstruksion të tillë e mundëson teorema 10 (Teksti, faqe 93).

Në teoremën 11, pa vërtetim, tregojmë se nëpër pikën A, që nuk i takon rrafshit β, mund të tërhiqet saktësisht një rrafsh paralel me rrafshin α.

Detyrat 2.45 - 2.47 janë rrjedhime të drejtpërdrejta të teoremës 11. Mbi detyrat 2.49 -2.54 mund të tregojmë të njëjtën gjë si mbi detyrat teorike në rastet paraprake.

3. KËNDI NDËRMJET DY DREJTËZAVE NË HAPËSIRË. ORTOGONALITETI I DREJTËZËS DHE I RRAFSHIT. DISTANCA E PIKËS NGA RRAFSHI

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson nocionin e këndit ndërmjet drejtëzave që priten;
- përvetëson nocionin e këndit ndërmjet drejtëzave tejkaluese;
- zgjidh detyrat e thjeshta në të cilat duhet të përcaktohet këndi ndërmjet drejtëzave të dhëna;
- përvetëson nocionin e ortogonalitetit reciprok të dy drejtëzave;
- përvetëson nocionin e këndit ndërmjet drejtëzës dhe të rrafshit;
- mëson të zgjidhë detyra të thjeshta në të cilat duhet të përcaktohet këndi ndërmjet drejtëzave të dhëna dhe rrafshit;
- përvetëson nocionin e ortogonalitetit të drejtëzës dhe rrafshit;
- identifikon në modele ortogonalitetin reciprok të drejtëzës dhe rrafshit;
- përvetëson nocionin e distancës së pikës nga një figurë e çfarëdoshme;
- përvetëson pohimet:
  - nëpër çdo pikë mund të tërhiqet saktësisht një drejtëz pingule në rrafshin e dhënë,
  - në qoftë se drejtëzat p dhe s janë pingule në rrafshin α, atëherë ato drejtëza janë paralele,
  - në qoftë se drejtëza n është pingule në dy drejtëza që kalojnë nëpër pikën e përbashkët të drejtëzës n dhe rrafshit α, atëherë ajo drejtëz është pingule (ortogonale) në atë rrafsh,
  - sipas kujt, distanca e pikës A nga rrafshi v është e barabartë me gjatësinë e pingules AB të lëshuar nga pika A në atë rrafsh;
- zgjidh detyrat e thjeshta stereometrike, në të cilat duhet të zbatohen dituritë e arritura më herët nga planimetria.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Derisa në rrafsh mund të flitet vetëm mbi këndin ndërmjet drejtëzave, në hapësirë kemi tri variante të atij nocioni:

- këndi ndërmjet dy drejtëzave;
- këndi ndërmjet drejtëzës dhe rrafshit;
- këndi ndërmjet dy rrafsheve.

Në fillim do të shqyrtojmë këndin ndërmjet dy drejtëzave në hapësirë. Dy drejtëza në hapësirë që priten e formojnë (e përcaktojnë) rrafshin (teorema 4, Teksti, faqe 85). Këndi ndërmjet drejtëzave të tilla ka kuptimin standard dhe paraqet këndin ndërmjet dy drejtëzave në rrafsh. Nocioni vijues është nocion i pastër stereometrik. Para futjes në përdorim të tij duhet të përsëritet përkufizimi i drejtëzave tejkaluese.

Si përkufizohet këndi ndërmjet drejtëzave tejkaluese?

Arsimtari vizaton në tabelë kubin dhe në të shënon dy drejtëza tejkaluese *p* dhe *s* (figura 52).

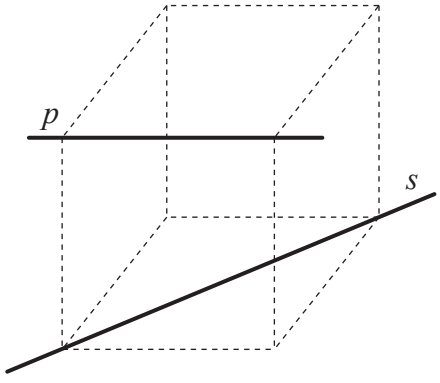


figura 52.

Më tutje, në tabelë vizatohet pika *A* dhe nëpër të tërhiqen dy drejtëza, drejtëza *p*' || *p* dhe drejtëza *s*' || *s* (figura 53).

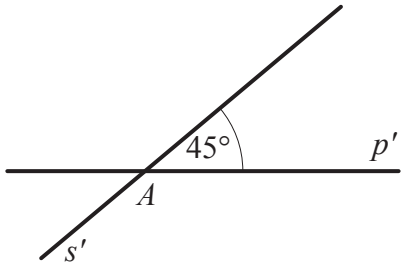


figura 53.

Ne besojmë se nxënësit vënë re se drejtëzat *p*' dhe *s*' mbyllin këndin 45º. Arsimtari i nxit nxënësit që të japin mendimin e vet mbi atë se cili kënd duhet përkufizuar si kënd ndërmjet drejtëzave *p* dhe *s*. Gjatë një dialogu të tillë duhet të arrihet deri te përkufizimi i këndit ndërmjet drejtëzave tejkaluese, pastaj edhe deri te përkufizimi i drejtëzave pingule tejkaluese ndërmjet tyre.

Përvetësimit të këndit ndërmjet drejtëzave në hapësirë i kontribuojnë detyrat e thjeshta 3.1 -3.7 dhe 3.17 (Përmbledhja, faqe 46 -47).

Një pyetje me gojë që do të tërheqë vëmendjen nxënësve:

E zëmë se drejtëza *p* nuk shtrihet në rrafshin $\boldsymbol{\alpha}$. Sa drejtëza pingule në drejtëzën *p* mund të tërhiqen në rrafshin α (Përmbledhja, detyra 3.9)?

Në rrafsh janë të vërteta këto pohime:

1. Në qoftë se drejtëza *p* dhe *s* janë pingule në drejtëzën *t*, atëherë drejtëzat *p* dhe *s* janë paralele.
2. Nëpër pikën *A* që nuk i takon drejtëzës *p* mund të tërhiqet saktësisht një drejtëz pingule në drejtëzën *p*.

A janë këto pohime të vërteta, në qoftë se *p*, *s* dhe *t* janë drejtëza në hapësirë (Përmbledhja, detyra 3.10 dhe 3.11)?

Edhe në këtë temë do të shqyrtojmë pozitën reciproke të drejtëzës dhe rrafshit, mirëpo nga këndvështrimi tjetër. Së bashku me relacionin e paralelizmit, rol të rëndësishëm në gjeometri ka ortogonaliteti. Derisa në rrafsh mund të flitet vetëm mbi ortogonalitetin e ndërsjellë të dy drejtëzave ose pjesëve të tyre, në hapësirë kemi 3 variante të këtij relacioni:

- ortogonaliteti i ndërsjellë i dy drejtëzave;
- ortogonaliteti i ndërsjellë i drejtëzës dhe i rrafshit;
- ortogonaliteti i ndërsjellë i dy rrafsheve.

Relacionin e parë nga këto relacione e kemi shqyrtuar më herët. Relacionin e fundit do ta shqyrtojmë më vonë.

Si përkufizohet ortogonaliteti i ndërsjellë i drejtëzës dhe i rrafshit?

Është me rëndësi që nxënësit të nxiten që të marrin pjesë në formimin e përkufizimit të këtij nocioni.

Arsimtari e tërheq drejtëzën *p* (segmentin) në dysheme të paraleles dhe tregon njërën prej brinjëve vertikale të faqeve anësore të paraleles. Brinjën e vërejtur të murit dhe drejtëzën *p* mund t'i shqyrtojmë si dy drejtëza tejkaluese.

Cilin kënd formon brinja në mur dhe drejtëza *p*?

Nxënësit nuk do ta kenë të vështirë të përfundojnë se është fjala mbi dy drejtëza pingule ndërmjet tyre. Arsimtari tërheq nëpër dysheme edhe drejtëzën e dytë dhe parashtron pyetjen e njëjtë. Tani duhet t'i jepet kuptim preciz nocionit të qartë intuitiv të nocionit të ortogonalitetit reciprok të drejtëzës dhe rrafshit.

Nxënësit në modelin e kubit identifikojnë drejtëzat dhe rrafshet pingule ndërmjet tyre (detyra 3.8, Përmbledhja). Detyra 3.16 mund të shqyrtohet gojarisht gjatë orës. Në mënyrë të ngjashme si ndërtimi i drejtëzës paralele me drejtëzën e dhënë, mund të bëhet ndërtimi i drejtëzës pingule në rrafshin e dhënë. Prandaj nxënësit duhet të punojnë në mënyrë të pavarur detyrën 3.8.

Përvetësimit të nocioneve stereometrike i kontribuojnë edhe vizatimet e figurave. Prandaj nxënësit duhet të vizatojnë figurat që ilustrojnë pohimet e mëposhtme, të cilat në Tekst nuk janë të formuluara:

Në qoftë se $p \parallel s$ dhe $p \perp \alpha$, atëherë $s \perp \alpha$.

Në qoftë se $\alpha \parallel \beta$ dhe $p \perp \alpha$, atëherë $p \perp \beta$.

Në qoftë se $p \perp \alpha$ dhe $s \perp \alpha$, atëherë edhe $p \parallel s$.

Në qoftë se $p \perp \alpha$ dhe $p \perp \beta$, atëherë edhe $\alpha \parallel \beta$.

Në pohimet e sipërme *p* dhe *s* janë drejtëza, kurse α dhe β janë rrafshe.

Teorema 12 duhet të formulohet pa vërtetim. (Teksti, faqe 95). Mbas përkufizimit të nocionit të ortogonalitetit do të rritet numri i detyrave numerike. Detyrë e tillë është shembulli 3.2 (Teksti, faqe 95).

Si të konstatojmë a është drejtëza *p* ortogonale në rrafshin α?

A na duhet të konstatojmë ortogonalitetin reciprok të drejtëzës *p* dhe çdo drejtëze të rrafshit α, apo për një konstatim të tillë mjafton që të shqyrtohet një numër i caktuar i drejtëzave në rrafsh? Në qoftë se drejtëza të tilla ekzistojnë, duhet të konstatojmë se cilat janë ato drejtëza dhe sa ka sosh. Arsimtari, pa bërë vërtetimin, formulon teoremën 13 (Teksti, faqe 95). Tani kemi bazë që të flasim mbi ortogonalitetin reciprok të brinjëve dhe faqeve të kuboidit.

Detyrat 3.13-3.15 janë shumë të lehta dhe zgjidhen në një hap duke zbatuar teoremën 13. Në fund të kësaj teme futet në përdorim edhe një nocion i rëndësishëm; distanca e pikës nga rrafshi. Në fillim përkufizohet distanca e pikës A nga figura F, si distanca e segmentit më të shkurtër ndër të gjitha segmentet të cilat pikën A e lidhin me pikat e figurës F, pastaj vërtetohet se kur është në pyetje pika dhe rrafshi, këtë veti ka pingulja e lëshuar nga pika A në atë rrafsh.

Në qoftë se nëpër mesin e segmentit *AB* tërheqim një drejtëz të çfarëdoshme *p*, atëherë pikat e skajshme *A* dhe *B* ndodhen në distancë të barabartë nga ajo drejtëz. A ndodhen pikat e skajshme në distanca të barabarta nga cilido rrafsh që kalon nëpër mesin e atij segmenti? (Përmbledhja, detyra 3.18 dhe 3.19).

Detyrat 3.18, 3.19 dhe 3.22 - 3.24 janë numerike dhe zgjidhen duke zbatuar njohuritë e arritura më herët nga planimetria. Prandaj nxënësit duhet të përsërisin teoremën e Pitagorës dhe vetitë kryesore të paralelogramit dhe të trapezit.

4. PROJEKSIONI ORTOGONAL NË RRAFSH

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e projeksionit në rrafsh;
- di çfarë është projeksioni ortogonal i segmentit, gjegjësisht drejtëzës;
- di kur projeksioni ortogonal i segmentit (drejtëzës) është pikë;
- përvetëson nocionin e segmentit të pjerrët;
- përvetëson pohimet:
- në qoftë se segmentet e pjerrëta AB dhe AC janë të barabarta, atëherë edhe projeksionet ortogonale të tyre në rrafshin α janë të barabarta,
- në qoftë se projeksionet ortogonale të segmenteve të pjerrëta AB dhe AC në rrafshin α janë të barabarta, atëherë edhe segmentet e pjerrëta AB dhe AC janë të barabarta.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Përkufizimi i projeksionit ortogonal në rrafsh është mjaft i natyrshëm dhe nxënësit do ta pranojnë lehtë. Qëllimi i detyrave 4.1- 4.6 (Përmbledhje, faqe 48) është që nxënësit të fitojnë shprehi që të përdorin nocionet e reja. Kur të përkufizohet segmenti i pjerrët dhe të vërtetohet teorema 17, nxënësve mund t'u jepen detyra të thjeshta teorike (Përmbledhja, detyra 4.8 - 4.14). Drejtimi praktik i tërë kësaj teme përbëhet në detyra numerike (Përmbledhja, detyra 4.15 - 4.28). Detyrat e tilla, të cilat në temat e mëhershme paraqiten rrallë, këtu dominojnë. Kjo është e kushtëzuar me futjen në përdorim të ortogonalitetit dhe distancës. Përmbajtja e detyrave llogaritëse është kryesisht e tillë që duhet të njehsohet distanca ndërmjet pikave (d.m.th. gjatësia e segmentit) ose distanca e pikës nga drejtëza, ose nga rrafshi. Mirëpo, edhe ato distanca janë gjatësitë e segmenteve (gjatësia e pingules së lëshuar prej pikës në drejtëz, gjegjësisht në rrafsh). Në detyrat e tilla në mënyrë të qartë është treguar çfarë janë hipotezat dhe çfarë kërkohet, kështu që ato nuk kërkojnë një përgatitje të veçantë didaktike. Siç kemi thënë edhe deri tani disa herë, zgjidhja e detyrave numerike kërkon zbatimin e njohurive të arritura më herët nga planimetria. Këtu, para së gjithash, mendojmë në teoremën e Pitagorës dhe vetitë e disa llojeve të trekëndëshave dhe katërkëndëshave.

5. KËNDI NDËRMJET DREJTËZËS DHE RRAFSHIT. KËNDI NDËRMJET DY RRAFSHEVE

Qëllimi që dëshirojmë të arrijmë është përkufizimi i nocioneve të përmendura në titull. Çdo përkufizim duhet ta përcjellin figurat përkatëse. Nxënësit në modelin e paralelepipedit përcaktojnë këndet ndërmjet drejtëzës dhe rrafshit ose këndet ndërmjet dy rrafsheve, ashtu që drejtëzat dhe rrafshet janë të përcaktuara nga kulmet e paralelepipedit (Përmbledhja, detyra 5.1, 5.11 - 5.12). Detyrat 5.2-5.6 janë numerike dhe sillen në zbatimin e varësisë reciproke të brinjëve të trekëndëshave kënddrejtë dybrinjënjëshëm dhe trekëndëshave kënddrejtë me këndë të brendshme të barabarta me 30º dhe 60º.

Me një numër detyrash ilustrohet dallimi ndërmjet këndeve të cilat i formojnë dy rrafshe dhe këndeve që formojnë drejtëza dhe rrafshi, si dhe këndeve që formojnë dy rrafshe. Gjatë zgjidhjes së detyrave të tilla, nxënësit doemos duhet të vizatojnë figurat.

Pohimi i mëposhtëm është i saktë në rrafsh:

Në qoftë se drejtëzat p dhe s formojnë këndë të barabarta me drejtëzën t, atëherë drejtëzat p dhe s janë paralele.

A vlen ky pohim në rastin kur drejtëzat p dhe s formojnë me rrafshin α këndë të barabarta? Vizato figurën (Përmbledhja, detyra 5.7).

Për drejtëzat dhe rrafshet vlejnë pohimet e mëposhtme:

a) Nëpër pikën e dhënë që nuk i takon rrafshit α mund të tërhiqet saktësisht një drejtëz pingule në atë rrafsh.

b) Në qoftë se drejtëza p është pingule në rrafshin α, atëherë drejtëza p është pingule në secilën drejtëz s paralele me atë rrafsh.

c) Përkufizimi i ortogonalitetit reciprok të drejtëzës p dhe rrafshit γ nënkupton se drejtëza p është ortogonale (pingule) në secilën drejtëz të atij rrafshi.

A janë të sakta pohimet e mëposhtme?

a') Nëpër pikën e dhënë që nuk i takon rrafshit α mund të tërhiqet saktësisht një rrafsh pingul në rrafshin α (Përmbledhja, detyra 5.13).

b') Në qoftë se rrafshi β është pingul në rrafshin α, atëherë rrafshi β është pingul në secilën drejtëz paralele me rrafshin α (Përmbledhja, detyra 5.14).

c') Në qoftë se rrafshi β është ortogonal në rrafshin α, atëherë rrafshi β është ortogonal në secilën drejtëz të rrafshit α (Përmbledhja, detyra 5.15).

Ju rekomandojmë edhe detyrën 5.17 në të cilën nxënësit duhet të vizatojnë figurën me të cilën ilustrohen raportet e caktuara reciproke të drejtëzave dhe të rrafsheve.

Detyrat 5.8 dhe 5.18-5.21 zgjidhen në një hap duke zbatuar përkufizimin e këndit ndërmjet drejtëzës dhe rrafshit, gjegjësisht dy rrafsheve.

Zgjidhja e detyrës 5.9 kërkon zbatimin e varësisë reciproke të brinjëve të trekëndëshit kënddrejtë me këndet e brendshme të barabarta me 30º dhe 60º, kurse zgjidhja e detyrës 5.10. zbatimin e një rregulle të kongruencës së trekëndëshave kënddrejtë.

1. TRUPAT GJEOMETRIKË. POLIEDRAT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e trupit gjeometrik;
- nocionin e poliedrit;
- mëson çfarë janë faqet, brinjët, kulmet dhe diagonalet hapësinore të poliedrit dhe është në gjendje që duke shikuar figurën ose modelin e poliedrit të tregojë ato elemente;
- përvetëson formulën e Ojlerit $K + F = B + 2$ dhe zgjidh detyrat e thjeshta në të cilat përdoret ajo formulë;
- përvetëson nocionin e hapjes së poliedrit;
- përvetëson nocionin e sipërfaqes së poliedrit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Trupin gjeometrik nxënësit duhet ta përvetësojnë si pjesë e hapësirës së kufizuar me pjesë të rrafsheve, të cilat mund të jenë të lakuara, shtrembëruara, të dredhura etj. Trupat e tillë janë të paraqitur në figurat 1.1 - 1.5 (Teksti, faqe 104). Ne mendojmë se këtu nuk ka nevojë që mbi figurat që kufizojnë trupin të flasim si mbi syprina. Me nocionin e syprinës nxënësi do të takohet në shkollimin e mëtejshëm, kurse në këtë nivel të mësimit ai nocion është i tepërt dhe ngarkues.

Arsimtari u tërheq vëmendjen nxënësve në dallimin midis trupit të paraqitur në figurën 1.2. dhe trupave të paraqitur në figurat 1.1 dhe 1.3 - 1.5. Kur nxënësit me ndihmën e arsimtarit nxjerrin përfundimin se trupat në figurat 1.1. dhe 1.3. - 1.5, në dallim nga trupi në figurën 1.2, janë të kufizuar me shumëkëndësha, arsimtari përkufizon nocionin e poliedrit.

Përvetësimit të nocionit të poliedrit i kontribuojnë detyra 1.1 (Përmbledhja, faqe 52), të cilën nxënësit e zgjidhin në orë.

Arsimtari përkufizon faqet, brinjët dhe kulmet e poliedrit. Duke marrë parasysh njohuritë e arritura më herët mbi shumëkëndëshat, nxënësit do të pranojnë lehtë nocionin e kulmeve të poliedrit. Përvetësimi i nocionit të faqeve dhe brinjëve të poliedrit gjithashtu duhet të jetë i suksesshëm, sepse emërtimet dhe përmbajtjet e atyre nocioneve janë të afërta me përdorimin e përditshëm të fjalës "brinjë" dhe "faqe". Situatë e ngjashme paraqitet edhe në lidhje me nocionet e faqeve fqinje dhe jo fqinje të poliedrit.

Nxënësit në mënyrë të pavarur i zgjidhin detyrat 1.2. dhe 1.3. (Përmbledhja, faqe 52).

Në një shembull të thjeshtë arsimtari e kontrollon saktësinë e barazimit $K + F = B + 2$, kurse nxënësit në mënyrë të pavarur i zgjidhin detyrën 1.4. (Përmbledhja, faqe 53).

Zgjidhja e detyrës 1.5. sillet në zgjidhjen e ekuacioneve të thjeshta lineare, kurse qëllimi i saj është që nxënësit të përvetësojnë faktin se në një radhitje, në pamje të parë, kaotike të faqeve, brinjëve dhe kulmeve të poliedrit, megjithatë ekziston një ligjshmëri. Nocionet e hapjes dhe syprinës së poliedrit janë ilustruar me figurën 1.1. (Teksti, faqe 104). Ato nocione shqyrtohen në detaje gjatë përpunimit të poliedrave konkretë (prizmave dhe piramidave).

Në shembujt paraprakë është dhënë figura e poliedrit, kurse nxënësit duhet të emërtojnë faqet e tij, brinjët dhe kulmet. Janë të paevitueshme detyrat në të cilat kërkohet që nxënësi të vizatojë në mënyrë të pavarur një figurë gjeometrike (të paktën ta kopjojë nga Teksti ose Përmbledhja) dhe të vërejë, të shënojë dhe të emërtojë disa elemente të saj. Shembuj të tillë janë detyrat:

Vizato një poliedër dhe emërto faqet e tij, brinjët dhe kulmet.

Vizato një poliedër dhe emërto dy çifte të faqeve fqinje dhe dy çifte të faqeve jo fqinje të atij poliedri.

Detyrat e tilla i përcjellin pyetjet:

Çfarë është poliedri?

Çfarë janë faqet, brinjët dhe kulmet e poliedrit?

Për cilat faqe të poliedrit thuhet se janë fqinje?

Detyrat e këtilla janë shqyrtuar në detaje në pyetjet e kontrollit (Teksti, faqe 105).

2. PRIZMI

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e prizmit;
- di se cilat faqe të prizmit quhen baza dhe cilat faqe anësore të prizmit;
- di se cilat brinjë quhen kryesore dhe cilat faqe anësore të prizmit;
- përvetëson nocionin e mbështjellësit të cilindrit;
- përvetëson se sipas numrit të brinjëve anësore, prizmat mund të jenë trekëndorë, katërkëndorë, pesëkëndorë, ..., *n* – këndorë,
- di të vizatojë figurat e prizmave të tillë dhe të emërtojë elementet e tyre;
- përvetëson nocionin e lartësisë së prizmit;
- di të përshkruajë dhe të vizatojë prizmat e drejtë dhe të pjerrët;
- di se faqet anësore të prizmit të drejtë janë drejtkëndësha;
- përvetëson se lartësia e prizmit të drejtë është e barabartë me gjatësinë e faqes anësore;
- di të përshkruajë dhe të vizatojë prizmat e rregullt dhe ata barabrinjës;
- di se faqet anësore të prizmit të rregullt janë drejtkëndësha kongruentë, kurse të prizmit barabrinjës katrorët.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Përvetësimi i nocioneve të përmendura në qëllimet operative realizohet ashtu që nxënësit në fillim përgjigjen në pyetjet e parashtruara me gojë dhe zgjidhin detyrat me të cilat formulohen përkufizimet e atyre nocioneve, pastaj duke vizatuar figurën ose analizën e figurës së dhënë, shënimin dhe emërtimin e elementeve të prizmit të paraqitur në figurë. Me këtë qëllim janë përpunuar edhe pyetjet kontrolluese (Teksti, faqe 107) dhe ato duhet të përpunohen doemos. Një qëllim të tillë e kanë edhe detyrat 2.1. – 2.3. (Përmbledhja, faqe 54). Në figurat 2.2.-2.4 (Përmbledhja, faqe 54) nxënësit duhet që vetë të shënojnë kulmet dhe të emërtojnë bazat dhe faqet anësore të atyre prizmave, si dhe brinjët e tyre kryesore dhe anësore.

Pyetje: A ekziston prizmi që ka të paktën dy brinjë anësore me gjatësi të ndryshme?

Shikoni figurën 2.1. (Teksti, faqe 106). Brinjët anësore të prizmit janë segmentet paralele ndërmjet rrafsheve paralele. Çfarë tregon teorema mbi segmentet paralele ndërmjet rrafsheve paralele mbi segmentet e tilla?

N: Segmentet paralele ndërmjet rrafsheve paralele janë të barabarta.

Pyetja: Të përsërisim pyetjen, a ekziston prizmi që ka një çift brinjësh anësore me gjatësi të ndryshme?

N: Nuk ekziston, sepse brinjët anësore të prizmit si segmente paralele ndërmjet rrafsheve paralele janë të barabarta.

Pyetja: A ekziston prizmi, numri i përgjithshëm e brinjëve të të cilit (brinjë në bazë dhe brinjë anësore) është i barabartë me 35?

- Arsimtari në tabelë vizaton tabelën e paplotësuar 2.1. (Përmbledhja, faqe 121) ose jep fletë mësimore me atë tabelë.

Pyetja: Tani do të përcaktojmë sa kulme, brinjë (anësore dhe kryesore), faqe (anësore dhe kryesore) ka prizmi trekëndor, katërkëndor, ..., *n*-këndor. Vizatoni prizmin trekëndor dhe pesëkëndor dhe plotësoni fushat e zbrazëta në rendin e dytë dhe të tretë të tabelës.

- Arsimtari u ndihmon nxënësve që të vënë re ligjshmërinë dhe të plotësojnë fushat e zbrazëta në rendin e fundit.

Pyetja: Të përsërisim pyetjen: a ekziston prizmi, numri i brinjëve të të cilit është i barabartë me 35? Numri i brinjëve të prizmit *n*-këndor është 3n. Tani pyetja e parashtruar mund të formulohet kështu:

A ekziston numri natyror *n* i tillë që 3n = 35? Një numër i tillë natyror nuk ekziston, prandaj nuk ekziston prizmi, numri i brinjëve të të cilit është 35.

Duke përdorur rendin e fundit të tabelës 2.1, nxënësit do të zgjidhin me lehtësi detyrat 2.6 – 2.18 (Përmbledhja, faqe 54).

Pastaj nxënësve duhet t'u parashtrohen pyetjet që në mënyrë të qartë do të tregojnë dallimin ndërmjet prizmave të drejtë, të rregullt dhe të prizmave barabrinjës (secili prizëm barabrinjës është i rregullt, mirëpo secili prizëm i rregullt nuk është barabrinjës).

Të tilla janë për shembull pyetjet:

1. Vizato prizmin e rregullt trekëndor. A ekziston prizmi i rregullt, baza e të cilit është trekëndësh kënddrejtë?

Prizmi i tillë i rregullt nuk ekziston, sepse trekëndëshat kënddrejtë nuk janë të rregullt. Trekëndëshat e rregullt janë trekëndësha barabrinjës.

2. Vizato prizmin e rregullt katërkëndor. A ekziston prizmi i rregullt, baza e të cilit është romb?

Prizmi i tillë i rregullt nuk ekziston, sepse katërkëndëshat e rregullt janë katrorë.

3. Vizato prizmin e rregullt trekëndor që nuk është prizëm barabrinjës.

4. Vizato hapjen e prizmit trekëndor, brinjët kryesore të të cilit kanë gjatësitë 1, 4 dhe 9 (në një njësi mase për gjatësinë). Vërej se faqet anësore të atij prizmi janë drejtkëndësha jokongruentë, të cilët kanë nga një brinjë të barabartë. Përse brinjët anësore të prizmit të rregullt janë katërkëndësha kongruentë? Vizato hapjen e prizmit të rregullt trekëndor dhe katërkëndor.

Çfarë janë faqet anësore të prizmit barabrinjës? Vizato hapjen e prizmit barabrinjës trekëndor dhe katërkëndor.

3. PARALELEPIPEDI. KUBOIDI. KUBI

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson përkufizimin e paralelepipedit, kuboidit dhe kubit;
- di se skajet e kuboidit që nisen nga një kulm quhen brinjë të kubit;
- di se përmasat e kubit shpeshherë quhen gjatësia, gjerësia dhe lartësia e kubit;
- përvetëson pohimin, sipas të cilit diagonalet hapësinore të kuboidit janë të barabarta;
- përvetëson formulën për njehsimin e gjatësisë së diagonales hapësinore të kuboidit;
- zgjidh me sukses detyrat e thjeshta në lidhje me atë formulë.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Bazën për realizimin e objektivave të caktuara e përbëjnë këto tri teorema (Teksti, faqe 108 dhe 109):

1. Diagonalet hapësinore të kuboidit janë të barabarta.

2. Për gjatësinë e diagonales hapësinore vlen $D=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, ku *a, b* dhe *c* janë gjatësia, gjerësia dhe lartësia e kuboidit.

3. Për gjatësinë e diagonales hapësinore të kuboidit vlen $D=a\sqrt{3}$, ku a është gjatësia e kubit.

Para vërtetimit të teoremës 1 duhet të përsëritet rregulla e kongruencës së trekëndëshave katet-katet. Teorema 1 vërtetohet duke bërë zbatimin e drejtpërdrejtë të asaj rregulle. Kur themi me zbatimin e drejtpërdrejtë, kemi parasysh se në vërtetim nuk ka argumente të tjera përveç asaj rregulle.

Teorema e dytë vërtetohet duke bërë zbatimin e drejtpërdrejtë të teoremës së Pitagorës.

Pra, fjala është mbi vërtetimet që nuk kërkojnë shumë kohë dhe të cilat nxënësit mund t'i përvetësojnë.

Në detyrat 3.1-3.7 (Përmbledhja, faqe 55), kërkesat janë të tilla që në bazë të madhësive të dhëna të disa elementeve të kuboidit ose kubit njehsohen madhësitë e panjohura të disa elementeve të tjera të tyre.

Doemos duhen përpunuar detyrat në të cilat shqyrtohen hapjet e kubit dhe kuboidit (detyrat 3.8. dhe 3.9.).

4. SIPËRFAQJA E PRIZMIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson se për sipërfaqen e prizmit vlen $S = 2B+M$ ku B është sipërfaqja e bazës dhe M, sipërfaqja e mbështjellësit të prizmit;
- përvetëson se mbështjellësi i prizmit të drejtë është drejtkëndësh, sipërfaqja e të cilit është e barabartë me prodhimin e perimetrit të bazës dhe të lartësisë së prizmit:
$$M = PH$$
- në bazë të pohimit të mëparshëm përvetëson se sipërfaqja e prizmit të drejtë shprehet sipas formulës:
$$S = 2B+PH;$$
- duke zbatuar formulën $S = 2B+PH$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshat dhe katërkëndëshat i njehson me sukses sipërfaqet e prizmave të drejtë, konkretë, trekëndorë dhe katërkëndorë;
- duke zbatuar formulën $S = 2B+PH$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshin barabrinjës, katrorin dhe gjashtëkëndëshin e rregullt përcakton formulat për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt trekëndor, katërkëndor dhe gjashtëkëndor.
- në bazë të elementeve të dhëna i njehson me sukses sipërfaqet e prizmave të rregullt trekëndorë, katërkëndorë dhe gjashtëkëndorë.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Qëllimi kryesor, që dëshirojmë ta arrijmë duke përpunuar këtë temë është përvetësimi i formulave për njehsimin e sipërfaqes për disa lloje prizmash. Të bëjmë një analizë të shkurtër të atyre formulave.

Formula e përgjithshme $S = 2B + M$ rrjedh nga përkufizimi i sipërfaqes së poliedrit dhe ilustrohet me figurën 4.1 (Teksti, faqe 110).

Duke zbatuar rregullat e prizmave të drejtë vërtetohet se mbështjellësi i prizmit është një drejtkëndësh, brinjët e të cilit kanë gjatësitë e barabarta me perimetrin e bazës dhe gjatësinë e lartësisë së prizmit. Në këtë mënyrë përftohet formula për njehsimin e sipërfaqes së mbështjellësit të prizmit M = PH. Duke zëvendësuar këtë vlerë në formulën e përgjithshme $S = 2B + M$ arrijmë deri te formula për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të drejtë:

$$S = 2B+PH.$$

Duke zbatuar këtë formulë ose duke bërë njehsimin e drejtpërdrejtë të sipërfaqes së hapjes së kuboidit dhe kubit arrijmë deri te formula për njehsimin e sipërfaqes së tyre:

$$S = 2(ab + ac + bc) \text{ dhe } S = 6a^2.$$

Duke zbatuar formulën $S = 2B+PH$ në prizmin e rregullt n-këndor, përftohet formula $S = 2B + naH$. Duke zbatuar këtë formulë dhe njohuritë e nxënësve të arritura më herët mbi sipërfaqen e trekëndëshit barabrinjës, katrorit dhe gjashtëkëndëshit të rregullt, përcaktohen lehtë formulat për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt trekëndor, katërkëndor dhe gjashtëkëndor:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH,\ S = 2a^2 + 4aH \text{ dhe } S = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$$ (tabela 4.1, Teksti, faqe 116)..

Pjesë e pandarë e përcaktimit të formulës për njehsimin e sipërfaqes dhe vëllimit të një trupi të caktuar janë figurat. Vizatimi i figurave kërkon shumë kohë dhe shpeshherë për këtë arsye (dhe jo vetëm për këtë arsye), idetë kryesore që dëshirohen të kumtohen mbeten në plan të dytë. Prandaj ne mendojmë se është më mirë që të përgatiten figurat para orës së mësimit.

Detyrë e rëndësishme e arsimtarit është të formojë atmosferën në të cilën nxënësit do të jenë aktorë aktivë gjatë procesit të përcaktimit të formulës.

Ne mendojmë se për zhvillimin intelektual të nxënësit, është më e dobishme një mprehtësi matematike që sjell deri te formulat e caktuara, sesa dhjetë detyra në të cilat, sipas asaj formule, njehsohen vlerat e madhësive të caktuara.

Përcaktimi i formulës së përgjithshme për njehsimin e sipërfaqes së prizmit:

$$S = 2B + M.$$

• Nxënësit shikojnë hapjen e prizmit të pjerrët të paraqitur në figurën 4.1 (Teksti, faqe 110).

Pyetje: Me çfarë është e barabartë sipërfaqja e poliedrit?

Përgjigjja: Sipërfaqja e poliedrit është e barabartë me shumën e sipërfaqeve të faqeve të tij.

Pyetja: Çfarë figurash janë faqet e prizmit (shikon figurën 4.1)?

Përgjigjja: Faqet e prizmit janë dy shumëkëndësha kongruentë - bazat e prizmit dhe disa paralelograme që formojnë mbështjellësin e prizmit.

Pyetja: Në figurën 4.1 me *B* është shënuar sipërfaqja e bazës së prizmit, kurse me *M* sipërfaqja e mbështjellësit të tij. Në pajtim me ato shenja me çfarë është e barabartë sipërfaqja e prizmit?

Përgjigjja: Sipërfaqja e prizmit është e barabartë me shumën e sipërfaqeve të bazave (*2B*) dhe sipërfaqen e mbështjellësit (*M*):

$$S = 2B + M.$$

Përcaktimi i formulës së përgjithshme për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të drejtë:

$$S = 2B + PH.$$

Pyetja: Në figurën 4.2. (Teksti, faqe 110) është paraqitur hapja e prizmit të drejtë. Lartësia e atij prizmi është shënuar me *H*. Cili është dallimi ndërmjet faqeve anësore të atij prizmi dhe faqeve anësore të prizmit të paraqitur në figurën 4.1?

Përgjigjja: Faqet anësore të prizmit të pjerrët janë paralelograme, kurse të prizmit të drejtë janë drejtkëndësha.

Pyetje: Tani vini re se mbështjellësi i prizmit të drejtë është drejtkëndësh. Një brinjë e atij drejtkëndëshi është e barabartë me lartësinë e prizmit (që shënohet me *H*). Krahasoni gjatësinë e brinjës së dytë të drejtkëndëshit dhe perimetrin e shumëkëndëshit të bazës së prizmit. Me çfarë është e barabartë gjatësia e brinjës tjetër të drejtkëndëshit? Me çfarë është e barabartë sipërfaqja e mbështjellësit?

Përgjigjja: Brinja e dytë e drejtkëndëshit është e barabartë me perimetrin e shumëkëndëshit të bazës. Sipërfaqja e mbështjellësit është $M = PH$

• Arsimtari në tabelë shënon formulën $M = PH$.

Arsimtari: Nëse në formulën e përgjithshme $S = 2B + M$ zëvendësojmë vlerën M = PH, do të përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të drejtë.

• Arsimtari shënon në tabelë formulën $S = 2B + PH$.

Përcaktimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt n-këndor:

$$S = 2B + naH.$$

• Arsimtari rikujton nxënësit në nocionin e prizmit të rregullt.

Pyetja: Për cilin prizëm thuhet se është prizëm i rregullt?

Përgjigja: Për prizmin e drejtë, baza e të cilit është shumëkëndësh i rregullt themi se është prizëm i rregullt.

Pyetja: Me çfarë është i barabartë perimetri i *n*-këndëshit të rregullt, brinja e të cilit ka gjatësinë *a*?

Përgjigjja: P = na.

• Arsimtari përcakton formulën e përgjithshme për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt *n*-këndor:

$$S = 2B + \boxed{P}H.$$

$$\boxed{P} = na.$$

$$S = 2B + naH.$$

Përcaktimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt trekëndor:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH.$$

• Arsimtari i rikujton nxënësit formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt *n*-këndor S= $2B+naH$ dhe vizaton figurat 1,2. dhe 3. (Teksti, figurat 4.9, 4.10. dhe 4.12.) në të cilat janë paraqitur trekëndëshi barabrinjës, katrori dhe gjashtëkëndëshi i rregullt dhe janë shënuar formulat për njehsimin e sipërfaqeve të tyre.

Pyetje: Në qoftë se në këtë formulë zëvendësojmë $n = 3$, do të përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt trekëndor:

$$S = 2B + 3aH.$$

Çfarë është baza e prizmit të rregullt trekëndor?

Përgjigjja: Baza e prizmit të rregullt trekëndor është një trekëndësh barabrinjës.

• Arsimtari tregon figurën 1 dhe në të formulën për njehsimin e sipërfaqes së trekëndëshit barabrinjës:

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Arsimtari: Në qoftë se vlerën $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ e zëvendësojmë në formulën $S = 2B + 3aH$, do të përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt trekëndore në të cilën figurojnë lartësia H dhe gjatësia e brinjës kryesore *a*:

$$S = \cancel{2}^{1} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{\cancel{4}^{2}} + 3aH,$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3aH.$$

Përcaktimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt katërkëndor:

$$S = 2a^2 + 4aH.$$

FLETA MËSIMORE NR. 1

1. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt *n*-këndor vlen $S = 2\boxed{} + \boxed{}$.
2. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt katërkëndor ($n = 4$) vlen $S' = 2\boxed{} + \boxed{}$.
3. Bazat e prizmit të rregullt katërkëndor janë _____.
4. Sipërfaqja e katrorit, brinja e të cilit ka gjatësinë *a* është $B = \boxed{}$.
5. Duke zëvendësuar vlerën e përftuar të madhësisë *B* në formulën e dytë, përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt katërkëndor:

$$S = 2\boxed{} + \boxed{}$$

$$S = 2\boxed{} + \boxed{}.$$

Duke plotësuar vendet e zbrazëta nxënësit përcaktojnë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt katerkëndor:

1. $S = 2B + naH$,
2. $S = 2\boxed{B} + 4aH$,
3. katrorët,
4. $\boxed{B} = a^2$,
5. $S = 2a^2 + 4aH$.

Përcaktimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt gjashtëkëndor:

$$S = 3a^2\sqrt{3} + 6aH.$$

FLETA MËSIMORE NR. 2.

1. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt n-këndor vlen $S = 2\boxed{} + \boxed{}$.

2. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt gjashtëkëndor vlen ($n = 6$) vlen $S = 2\boxed{} + \boxed{}$.

3. Bazat e prizmit të rregullt gjashtëkëndor janë _____.

4. Sipërfaqja e gjashtëkëndëshit të rregullt, brinja e të cilit ka gjatësinë a (figura 3.) $B = \boxed{}$.

5. Duke zëvendësuar vlerën e përftuar të madhësisë B në formulën e dytë, përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt gjashtëkëndor:

$$S = 2\boxed{} + \boxed{}$$

$$S = \boxed{} + \boxed{}.$$

Duke plotësuar vendet e zbrazëta, nxënësit përcaktojnë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të rregullt gjashtëkëndor:

1. $S = 2B + naH$,

2. $S = 2\boxed{B} + 6aH$,

3. gjashtëkëndëshat e rregullt,

4. $\boxed{B} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$,

5. $S = \cancel{2}^{1} \cdot \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{\cancel{2}^{1}} + 6aH$,

6. $S = 3a^2\sqrt{3} + 6aH$.

Zgjedhja e detyrave. Meqenëse në klasën e tretë të shkollës së mesme nxënësit i pret edhe një takim me këtë temë, përmbajtja e detyrave për këtë dhe për temat vijuese në këtë Tekst duhet të jetë e tillë që nxënësit të mund t'i zgjidhin vetëm duke zbatuar njohuritë e arritura më herët mbi perimetrin dhe sipërfaqen e shumëkëndëshave (klasa e shtatë dhe e tetë). Aty, para së gjithash, kemi parasysh: trekëndëshin kënddrejtë dhe trekëndëshin dybrinjënjëshëm, katrorin, drejtkëndëshin, rombin, paralelogramin, trapezin kënddrejtë dhe barakrahës. Do të ishte mirë që një orë t'i kushtohet përsëritjes së lëndës që ndërlidhet në këto përmbajtje. Në këtë orë arsimtari do të theksonte formulat kryesore dhe rastet karakteristike të cilat takohen në detyra. Për shembull, formulat për njehsimin e sipërfaqes dhe zbatimi i teoremës së Pitagorës në: trekëndëshin dybrinjënjëshëm dhe barabrinjës, katrorin, rombi, paralelogramin, trapezin kënddrejtë dhe barakrahës, njehsimin e madhësive të elementeve të rombit, paralelogramit, trapezit kënddrejtë dhe barakrahës, këndi i ngushtë i të cilëve në bazë është i barabartë me 30º, 60º ose 45º.

5. PIRAMIDA

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- përvetëson përkufizimin përshkrues të piramidës;
- di se cilën faqe e quajmë kryesore dhe cilat faqe i quajmë faqe anësore të piramidës;
- di se cilën brinjë e quajmë kryesore dhe cilat i quajmë brinjë anësore të piramidës;
- di se cilat faqe të piramidës e përbëjnë mbështjellësin e saj;
- di se sipas numrit të brinjëve kryesore, piramidat mund të jenë trekëndore, katërkëndore, pesëkëndore,..., *n*-këndore;
- di të vizatojë figurat e piramidave të tilla;
- përvetëson nocionin e lartësisë së piramidës;
- përvetëson nocionin e piramidës së drejtë;
- përvetëson nocionin e apotemës së piramidës;
- përvetëson teoremën sipas të cilës apotemat e piramidës së drejtë janë të barabarta;
- di të përshkruajë dhe të vizatojë piramida të rregullta dhe piramida barabrinjëse;
- përvetëson formulën $h^2 = H^2 + r^2$, ku *h* është gjatësia e apotemës, *H* lartësia e piramidës dhe *r* rrezja e vijës rrethore të brendashkruar në shumëkëndëshin e bazës së piramidës së drejtë;
- duke përdorur formulën $h^2 = H^2 + r^2$ njehson njërën prej tri vlerave *h, H* dhe *r,* kur janë të njohura dy madhësitë e tjera.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Tërë biseda në lidhje me përvetësimin e nocioneve të përmendura në qëllimet operative, kur kemi folur mbi prizmin mund të përsëritet edhe për piramidën.

Përvetësimit të nocioneve të piramidës dhe hapjes së piramidës i kontribuojnë detyrat 5.1, 5.2 dhe 5.3, 5.4 (Përmbledhja, faqe 60).

Në lidhje me përkufizimin e piramidës së drejtë mund të parashtrohet pyetja e mëposhtme:

A ekziston për secilin numër natyror *n* piramida e drejtë *n*-këndore?

Arsimtari përmend se përreth vijës së çfarëdoshme rrethore *V(O,r)* në rrafshin α mund të jashtëshkruhet shumëkëndëshi që përbëhet nga një numër i çfarëdoshëm brinjësh. Si realizohet një gjë e tillë? Në vijën e çfarëdoshme rrethore zgjedhim *n* pika C_1, C_2, C_3..., C_n . Nëpër pikat B_1, B_2, B_3, ..., B_n të cilat i përgjysmojnë harqet C_1C_2,C_2C_3,...$C_{n-1}C_n$, C_nC_1 tërheqim tangjentet paralele me kordat C_1C_2, C_2C_3..., $C_{n-1}C_n$, C_nC_1. Atëherë pikat A_1, A_2...A_n, në të cilat priten tangjentet e tërhequra nga pikat fqinje në vijën rrethore, janë kulmet e *n*-këndëshit të jashtëshkruar përreth asaj vije rrethore. Në hapësirë marrim cilëndo pikë V, projeksioni ortogonal i së cilës në rrafshin α është qendra e vijës rrethore O. Atëherë pikat V, A_1A_2,...A_n janë kulmet e piramidës së drejtë *n*-këndore.

Për secilin numër natyror *n* ekziston piramida e drejtë *n*-këndore.

Rol të rëndësishëm në hulumtimin e piramidës së drejtë kanë dy teoremat e mëposhtme (Teksti, faqe 118):

1. Apotemat e piramidës së drejtë janë të barabarta.

2. Në qoftë se janë të njohura dy nga tri madhësitë *h, H* dhe *r* (gjatësia e apotemës, lartësia dhe rrezja e vijës rrethore të brendashkruar në shumëkëndëshin e bazës së piramidës), atëherë edhe madhësia e tretë mund të shprehet duke zbatuar njërën prej formulave:

$$h = \sqrt{H^2 + r^2},\ H = \sqrt{h^2 - r^2},\ r = \sqrt{h^2 - H^2}.$$

3. Në qoftë se *B* dhe *P* janë sipërfaqja dhe perimetri i shumëkëndëshit të jashtëshkruar përreth vijës rrethore, atëherë rrezja e vijës rrethore përcaktohet nga formula:

$$r = \frac{2B}{P}$$

Teorema e parë vërtetohet në bazë të teoremës sipas të cilës nga barazia e projeksioneve ortogonale të segmenteve të pjerrëta rrjedh barazia e segmenteve të pjerrëta, kurse e dyta duke zbatuar teoremën e Pitagorës në shumëkëndëshin kënddrejtë *SLV* të paraqitur në figurën 5.9 (Teksti, faqe 118). Teorema e tretë është vërtetuar për $n = 3$.

Para vërtetimit të teoremës 1 mund të formulojmë detyrën:

Vizatoni figurën që tregon se apotemat e piramidës nuk janë doemos të barabarta.

Teorema 2 zbatohet shpeshherë gjatë njehsimit të sipërfaqes dhe vëllimit të piramidës dhe në Përmbledhje i janë kushtuar detyrat 5.9-5.19 (Përmbledhja, faqe 60). Doemos duhen përpunuar disa nga ato detyra.

Edhe këtu, si në rastin e prizmit, duhet të jepen instruksione dhe të parashtrohen pyetje të cilat do të bëjnë dallimin e qartë midis piramidave të drejta dhe të rregullta (secila piramidë e rregullt është e drejtë, mirëpo secila piramidë e drejtë nuk është e rregullt), si dhe ndërmjet piramidave të rregullta dhe barabrinjëse (secila piramidë barabrinjëse është e rregullt, mirëpo secila piramidë e rregullt nuk është barabrinjëse).

Të tilla janë, për shembull, instruksionet dhe pyetjet:

1. Vizato piramidën e drejtë trekëndore. A ekziston piramida e rregullt, baza e së cilës është trekëndësh kënddrejtë?

Piramida e tillë e rregullt nuk ekziston, sepse trekëndëshat e rregullt janë trekëndësha barabrinjës.

2. Vizato piramidën e drejtë katërkëndore. A ekziston piramida e rregullt, baza e të cilës është romb?

Piramida e tillë e rregullt nuk ekziston, sepse katërkëndëshat e rregullt janë katrorë.

3. Vizato piramidën e rregullt trekëndore që nuk është barabrinjëse.

4. Vizato piramidën e drejtë trekëndore, brinjët kryesore të së cilës kanë gjatësitë 1,4 dhe 9 (në një njësi mase për gjatësinë). Vini re se faqet anësore të asaj piramide janë trekëndësha jokongruentë, të cilët kanë nga një brinjë të barabartë. Përse faqet anësore të piramidës së rregullt janë trekëndësha kongruentë?

Cilat janë faqet anësore të piramidës barabrinjëse?

6. SIPËRFAQJA E PIRAMIDËS

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- në bazë të përkufizimit të poliedrit dhe përkufizimit të piramidës përvetëson se për sipërfaqen e piramidës vlen $S = B+M$, ku B është sipërfaqja e bazës, kurse M është sipërfaqja e mbështjellësit;
- përvetëson se sipërfaqja e mbështjellësit të piramidës së drejtë është e barabartë me gjysmën e prodhimit të perimetrit të bazës dhe gjatësisë së apotemës së piramidës:

$$M = \frac{1}{2}Ph;$$

- në bazë të pohimit paraprak përvetëson se sipërfaqja e piramidës së drejtë gëzon formulën:

$$S = B + \frac{1}{2}Ph;$$

- duke përdorur formulën $S = B + \frac{1}{2}Ph$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshat dhe katërkëndëshat njehson sipërfaqen e piramidave të drejta konkrete trekëndore dhe katërkëndore;
- duke përdorur formulën $S = B + \frac{1}{2}Ph$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshat barabrinjës, katrorët dhe gjashtëkëndëshat e rregullt, përcakton formulat për njehsimin e sipërfaqes së piramidave të rregullta trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore;
- në bazë të elementeve të dhëna njehson me sukses sipërfaqet e piramidave të rregullta trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Struktura logjike e përmbajtjeve në këtë temë është e njëjtë si te rasti i prizmit.

Të gjitha formulat përcaktohen duke zbatuar formulën e përgjithshme $S = B + M$ në lloje të caktuara të piramidave.

Duke zbatuar vetinë e piramidave të rregullta, sipas të cilave apotemat e tyre janë të barabarta, vërtetohet se sipërfaqja e mbështjellësit është e barabartë me gjysmën e prodhimit të perimetrit të bazës dhe gjatësinë e apotemës:

$$M = \frac{1}{2}Ph;$$

Duke zëvendësuar këtë vlerë në formulën e përgjithshme $S = B + M$ arrijmë deri te formula për sipërfaqen e piramidës së rregullt:

$$S = B + \frac{1}{2}Ph.$$

Duke zbatuar këtë formulë në piramidën e rregullt n-këndore përftohet formula $S = B + \frac{1}{2}nah.$

Duke zbatuar formulën paraprake, përcaktohet lehtë formula e sipërfaqes e piramidës së rregullt trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore:

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}ah,$ $S = a^2 + 2ah$ dhe $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah.$ (tabela 6.1, Teksti, faqe 124).

Të japim disa propozime se si mund të përcaktohen formulat e përmendura:

Përvetësimi i formulës së përgjithshme për njehsimin e sipërfaqe së piramidës:

$$S = B + M$$

- Nxënësit shikojnë hapjen e piramidës së paraqitur në figurën 6.1 (Teksti, figurat 6.1. dhe 6.2, faqe 120).

Pyetja: Me çfarë është e barabartë sipërfaqja e poliedrit?

Përgjigjja: Sipërfaqja e poliedrit është e barabartë me shumën e sipërfaqeve të faqeve të tij.

Pyetja: Cilat figura janë faqet e piramidës?

Përgjigjja: Faqet e piramidës janë shumëkëndëshi i bazës dhe trekëndëshat që formojnë mbështjellësin e piramidës.

Në bazë të këtyre përgjigjeve nxirret përfundimi:

Sipërfaqja e piramidës është e barabartë me shumën e sipërfaqes së bazës (B) dhe sipërfaqes së mbështjellësit (M):

$$S = B + M.$$

Përvetësimi i formulës së përgjithshme për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së drejtë:

$$S = B + \frac{1}{2}Ph.$$

FLETA MËSIMORE NR. 3.

1. Për sipërfaqen e piramidës vlen $S = \boxed{B} + \boxed{M}$.
2. Në bazë të figurës 6.4. (Teksti, faqe 121) njehsohet sipërfaqja e mbështjellësit të piramidës së drejtë:

$i)\ M = \boxed{S(\triangle AVB)} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{},$

$ii)\ M = \boxed{\frac{1}{2}ah} + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{2}} + \boxed{\frac{1}{2}},$

$iii)\ M = \frac{1}{2}()h,$

$iv)\ M = \boxed{}$, ku $P = a + b + c + d$ është perimetri i shumëkëndëshit të bazës.

3. Duke zëvendësuar madhësinë M në formulën $S = B + M$ përftohet formula për sipërfaqen e piramidës

së drejtë $S = \square + \boxed{\frac{1}{2}} . \square$

Punën në fletën mësimore mund ta përcjellë dialogu vijues.
Pyetja: Për cilat piramida themi se janë piramida të drejta?
Përgjigjja: Piramida quhet e drejtë, në qoftë se në shumëkëndëshin e bazës mund të brendashkruhet vija rrethore, qendra e së cilës përputhet me rrezen e lartësisë së piramidës.

Pyetja: Shikoni hapjen e piramidës së drejtë të paraqitur në figurën 6.4 (Teksti, faqe 121). Me çfarë është e barabartë sipërfaqja e mbështjellësit si union i trekëndëshave: ABV, BVC, CVD dhe DVA?
Përgjigjja: Sipërfaqja e mbështjellësit është e barabartë me shumën e sipërfaqeve të trekëndëshave *ABV, BVC, CVD* dhe *DVA*.

- Nxënësit plotësojnë fushat e zbrazëta në rendin e tretë të fletës:

$$M = S(\triangle AVB) + S(\triangle BVC) + S(\triangle CVD) + S(\triangle DVA).$$

Pyetja: Si quhen lartësitë e trekëndëshave anësorë të piramidës, të lëshuara nga maja *V*?
Përgjigjja: Lartësitë e atyre trekëndëshave quhen apotemat e piramidës.
Pyetja: Si është raporti reciprok i apotemave të piramidës së drejtë?
Përgjigjja: Apotemat e piramidës së drejtë janë të barabarta.
Arsimtari: Plotësoni rendin i) ashtu që sipërfaqen e mbështjellësit ta shënoni si shumë të trekëndëshave që e përbëjnë atë.

- Nxënësit plotësojnë fushat e zbrazëta në rendin *i*):

$$i)\ M = S(\triangle AVB) + S(\triangle BVC) + S(\triangle CVD) + S(\triangle DVA).$$

Pyetja: Me çfarë është e barabartë sipërfaqja e trekëndëshit AVB?
Përgjigjja: $S(\triangle AVB) = \frac{1}{2}ah.$
Arsimtari: Plotësoni fushat e tjera të zbrazëta në fletën mësimore.

- Nxënësit plotësojnë fushat e zbrazëta:

2. $ii)\ M = \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{2}ch + \frac{1}{2}dh,$

$iii)\ M = \frac{1}{2}(a+b+c+d)h,$

$iv)\ M = \frac{1}{2}Ph,$ ku *P* është perimetri i bazës,

3. $S = B + \frac{1}{2}Ph.$

Përvetësimi i formulës së për njehsimin e sipërfaqes së piramidës të rregullt *n*-këndore:

$$S = B + \frac{1}{2}nah.$$

Arsimtari u rikujton nxënësve nocionin e piramidës së rregullt.
Pyetja: Për cilat piramida themi se janë piramida të rregullta?
Përgjigjja: Për piramidën e drejtë, baza e të cilës është shumëkëndësh i rregullt themi se është piramidë e rregullt.
Pyetja: Me çfarë është i barabartë perimetri i shumëkëndëshit të rregullt, brinja e të cilit ka gjatësinë *a*?
Përgjigjja: $P = na$.
Arsimtari përcakton formulën e përgjithshme për njehsimin e piramidës së rregullt *n*-këndore.

$$S = B + \frac{1}{2}\boxed{P}h.$$

$$\boxed{P} = na.$$

$$S = B + \frac{1}{2}nah.$$

Përvetësimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt trekëndore:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}ah.$$

FLETA MËSIMORE NR. 4

1. Për sipërfaqen e piramidës së rregullt n-këndore vlen $S = \square + \boxed{\frac{1}{2}nah}$.

2. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt trekëndor ($n = 3$) vlen $S = \boxed{\quad B \quad} + \boxed{\frac{3}{2}\quad}$.

3. Baza e piramidës së rregullt trekëndore është _____.

4. Sipërfaqja e trekëndëshit barabrinjës, brinja e të cilit ka gjatësinë a është $B = \boxed{\quad - \quad}$.

5. Duke zëvendësuar vlerën e përftuar të madhësisë B në formulën e dytë, përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së piramidës të rregullt trekëndore

$$S = \boxed{\qquad} + \boxed{\quad - \quad}.\square$$

Arsimtari u rikujton nxënësve formulën për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt n-këndore dhe nga nxënësit kërkon që të shënojnë atë formulë për $n = 3$. Nxënësit plotësojnë fushat e zbrazëta në fletën mësimore:

1. $S = B + \frac{1}{2}nah,$

2. $S = B + \frac{3}{2}nah,$

3. trekëndëshi barabrinjës,

4. $B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$

5. $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{2}ah.$

Përvetësimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së piramidës të rregullt katërkëndore:

$$S = a^2 + 2ah.$$

FLETA MËSIMORE NR. 5

1. Për sipërfaqen e piramidës së rregullt n-këndore vlen $S = \square + \boxed{\frac{1}{2}\quad}$.

2. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt katërkëndor ($n = 4$) vlen

$$S = \square + \boxed{\frac{1}{2}\quad} = \square + \square$$

3. Baza e piramidës së rregullt katërkëndore është _____.

4. Sipërfaqja e katrorit, brinja e të cilit ka gjatësinë a është $B = \square$.

5. Duke zëvendësuar vlerën e përftuar të madhësisë B në formulën e dytë, përftojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt katërkëndore:

$$S = \square + \square.$$

Duke plotësuar fletën mësimore, nxënësit duhet të përcaktojnë formulën për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt katërkëndore:

1. $S = \boxed{B} + \frac{1}{2}nah,$
2. $S = \boxed{B} + \frac{4}{2}ah,$
3. katror,
4. $\boxed{B} = a^2,$
5. $S = a^2 + 2ah.$

Përvetësimi i formulës për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt gjashtëkëndore:

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah.$$

FLETA MËSIMORE NR. 6.

1. Për sipërfaqen e piramidës së rregullt n-këndore vlen $S = \square + \boxed{\frac{1}{2}\cdot\quad}$.
2. Për sipërfaqen e prizmit të rregullt gjashtëkëndore ($n = 6$) vlen

$$S = \square + \boxed{\frac{1}{2}\cdot\quad} = \square + \square$$

3. Baza e piramidës së rregullt gjashtëkëndore është _____.

4. Sipërfaqja e gjashtëkëndëshit të rregullt, brinja e të cilit ka gjatësinë α është $B = \boxed{\quad}$.

5. Duke zëvendësuar vlerën e përftuar të madhësisë β në formulën e dytë përftojmë formulën për

njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt gjashtëkëndore:

$$S = \boxed{\quad - \quad} + \boxed{\quad\quad}.$$

Duke plotësuar fletën mësimore nxënësit duhet të përcaktojnë formulën për njehsimin e sipërfaqes së piramidës së rregullt gjashtëkëndore:

1. $S = \boxed{B} + \boxed{\frac{1}{2}nah}$,
2. $S = \boxed{B} + \frac{1}{2} \cdot 6ah = \boxed{B} + \boxed{3ah}$,
3. gjashtëkëndësha të rregullt.
4. $\boxed{B} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$,
5. $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah.$

VËLLIMI I POLIEDRIT

1. VËLLIMI I TRUPIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson përkufizimin përshkrues të vëllimit të trupit;
- di çfarë domethënë të matet një madhësi dhe në atë kontekst di çfarë domethënë të matet vëllimi i trupit;
- di njësitë për matjen e vëllimit;
- di se si në mënyrën eksperimentale të krahasojë vëllimet e dy trupave të ndërtuar nga një material i njëjtë apo i ndryshëm.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Në tekstet mësimore, sipërfaqja dhe vëllimi i poliedrit kryesisht mësohen njëkohësisht. Në ato tekste takohen titujt "Sipërfaqja dhe vëllimi i prizmit", "Sipërfaqja dhe vëllimi i piramidës" etj. Në këtë Tekst, nocionet e sipërfaqes së poliedrit dhe vëllimit të poliedrit shqyrtohen si dy tema të veçanta. Na duket se duhet të theksojnë arsyet që na kanë nxitur në një qasje të tillë. Në kuptimin përmbajtës, nocioni i sipërfaqes së poliedrit nuk sjell një gjë të re:

Sipërfaqe të poliedrit quajmë shumën e sipërfaqeve të faqeve të tij.

Meqenëse faqet e poliedrit janë shumëkëndësha, nocioni i sipërfaqes së poliedrit sillet në nocionin e përvetësuar më herët, sipërfaqen e shumëkëndëshit. Detyrat në të cilat duhet të njësohet sipërfaqja e prizmit ose sipërfaqja e piramidës në kuptimin teknik gjithashtu nuk sjellin diçka të re. Padyshim mund të konstatohet se është fjala mbi përsëritjen e njohurive të arritura më herët mbi sipërfaqen e shumëkëndëshit, në veçanti mbi sipërfaqen e drejtkëndëshit, trekëndëshit, paralelogramit dhe trapezit. Të shikojmë formulën për njehsimin e sipërfaqes së prizmit të drejtë dhe formulën për njehsimin e vëllimit të prizmit:

$$S = 2B + PH, \quad V = BH.$$

Formula e parë përmban tri ndryshore B, P dhe H, kurse formula e dytë dy ndryshore B dhe H, prandaj në këtë kontekst formula e parë është më e komplikuar sesa e dyta. Krahas saj, kur njësojmë sipërfaqen e prizmit, d.m.th kur përcaktojmë madhësitë B, P dhe H, me zbatimin e drejtpërdrejtë të formulës $V = BH$ përftojmë vëllimin e prizmit. Mirëpo, formula e parë vërtetohet drejtpërsëdrejti, në bazë të formës së hapjes së prizmit të drejtë, kurse përcaktimi i formulës së dytë bazohet në një rezonim më të ndërlikuar matematik, të cilin dëshirojmë t'ua afrojmë nxënësve. Të përfundojmë, jemi të bindur se duke përpunuar njëkohësisht sipërfaqen dhe vëllimin e poliedrit më shumë theksohet ana teknike e problemit, kurse vetë nocioni i vëllimit të trupit dhe përcaktimi i formulave vendoset në plan të dytë. Duke pranuar se qëllimi kryesor i kësaj teme nuk është që të mësohen nxënësit që duke zbatuar formulën $V = BH$ të njehsojnë vëllimin e prizmit, por krahas këtij qëllimi, rol të rëndësishëm në arsimimin e nxënësve kanë edhe themelimi i nocionit *vëllim,* matja e vëllimit dhe idetë matematike që mundësojnë përcaktimin e formulave për njehsimin e atyre madhësive, kemi vendosur që ato nocione dhe procese t'i përpunojmë në mënyrën që është prezantuar në Tekst.

Nga arsyet e kuptueshme në këtë nivel mësimi nuk mund të bëhet fjalë mbi përkufizimin formal të vëllimit të trupit. Prandaj kur flitet mbi vëllimin, flitet mbi madhësinë e hapësirës që zë ai trup. Matja e vëllimit të trupit është përshkruar si proces i harmonizuar me idenë e përgjithshme të matjes. Kjo kërkon që të përmenden njësitë për matjen e vëllimit, të cilat nxënësit i dinë paraprakisht. Për shkak të një numri të konsiderueshëm të detyrave në të cilat, në bazë të dendësisë së trupit duhet të përcaktohet masa e tij, nëpër shembuj kemi ilustruar nocionin e dendësisë së trupit homogjen dhe kemi përmendur dendësitë e materialeve që takohen shpeshherë në detyra. Janë përshkruar dy metoda eksperimentale të krahasimit të vëllimit të trupave që do t'i përdorim si motiv për përvetësimin e disa teoremave, vërtetimin e të cilave nuk mund ta kryejmë për shkak të mungesës së aparatit matematik. Fjala është mbi teoremën sipas të cilës piramidat me bazat kongruente dhe lartësi të barabarta kanë vëllime të barabarta dhe formulën për njehsimin e vëllimit të topit.

2. VËLLIMI I PRIZMIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- në bazë të shembujve konkretë përvetëson se për vëllimin e kuboidit vlen $V = abc$, ku a, b dhe c janë gjatësia, gjerësia dhe lartësia e kuboidit;
- di se formula $V = abc$ mund të shkruhet në formën $V = BH$, ku $B = ab$ është sipërfaqja e bazës dhe H = c është gjatësia e lartësisë së tij;
- di të sqarojë se si duke zgjeruar (plotësuar) prizmin e drejtë trekëndor deri te kuboidi tregohet se edhe për vëllimin e prizmit trekëndor vlen $V = BH$;
- di të sqarojë se si duke ndarë prizmat e drejtë katërkëndorë (pesëkëndorë, gjashtëkëndorë) në dy (tri, katër) prizma trekëndorë tregohet se edhe për vëllimin e atyre prizmave vlen $V = BH$;
- në bazë të shqyrtimeve paraprake përvetëson se vëllimi i secilit prizëm të drejtë njehsohet sipas formulës $V = BH$;
- duke përdorur formulën $V = BH$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshat dhe katërkëndëshat, i zgjidh me sukses vëllimet e prizmave të drejtë konkretë trekëndorë dhe katërkëndorë;
- duke përdorur formulën $V = BH$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshat barabrinjës, katrorët dhe gjashtëkëndëshat e rregullt, përcakton formulat për njehsimin e vëllimit të prizmit të rregullt trekëndor, katërkëndor dhe gjashtëkëndor;
- në bazë të elementeve të dhëna njehson me sukses vëllimin e prizmit të rregullt trekëndor, katërkëndor dhe gjashtëkëndor;

UDHËZIME DIDAKTIKE

Përmbajtjen e këtij titulli e përbëjnë tri teorema:

1. Për vëllimin e kuboidit vlen $V = abc$, ku a, b dhe c janë gjatësia, gjerësia dhe lartësia e kuboidit;
2. Për vëllimin e prizmit trekëndor vlen $V = BH$, ku B është sipërfaqja e bazës dhe H lartësia e prizmit.
3. Për vëllimin e çdo prizmi vlen $V = BH$.

Formulën për njehsimin e vëllimit të kuboidit, $V = abc$, e përcaktojmë në bazë të shembullit konkret në të cilin vëllimi njehsohet duke numëruar centimetrat kub (ose disa njësi të tjera të masës së vëllimit) të cilat mund të vendosen në atë kuboid.

Hapi vijues është përcaktimi i formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit të drejtë trekëndor, $V = BH$. Deri te kjo formulë arrihet duke plotësuar prizmat trekëndorë deri te kuboidi.

Në fund, duke ndarë prizmin e çfarëdoshëm në prizma trekëndorë përcaktojmë formulën për njehsimin e vëllimit të prizmit:

$$V = BH.$$

▲ Përvetësimi i formulës për njehsimin e vëllimit të kuboidit:

$$V = abc.$$

Arsimtari: Gjatësitë e brinjëve të kuboidit të paraqitur në figurën 2.1 (Teksti, faqe 131) janë $a = 5cm$, $b = 3cm$ dhe $c = 4cm$. Në qoftë se brinjët e atij kuboidit i ndajmë në segmente me gjatësi 1 cm dhe nëse nëpër pika të ndarjes vendosim rrafshet paralele me faqet e kuboidit, do të përftohet ndarja e kuboidit në kube me vëllime $1cm^3$. Numri matës i vëllimit të kuboidit në centimetra kub është i barabartë me numrin e kubeve të përftuara ashtu. Numëroni kubet në të cilat është copëtuar kuboidi në figurë dhe shënoni sa është vëllimi i kuboidit të përftuar.

- Nxënësi në tabelë shënon $V = 60cm^3$

Arsimtari: Njehsoni prodhimin abc për $a = 5cm, b = 3cm$ dhe $c = 4cm$ dhe kumtojeni rezultatin.

• Nxënësi shënon në tabelë $abc = 60cm^3$.

Pyetja: Keni përftuar dy barazime $V = 60cm^3$ dhe $abc = 60cm^3$ anët e djathta të të cilave janë të barabarta. Çfarë mund të thuhet mbi madhësitë që ndodhen në anët e majta të atyre barazimeve?

Përgjigjja: Ato madhësi janë të barabarta.

Arsimtari: Shënoni barazinë e atyre madhësive.

• Nxënësi në tabelë shënon $V = abc$

Arsimtari: Formulën e njëjtë do ta kishim përftuar për kuboidin, përmasat e të cilit janë numra të çfarëdoshëm *a, b* dhe *c*. Të përfundojmë:

Vëllimi i kuboidit është i barabartë me prodhimin e brinjëve të tij:

$$V = abc.$$

Kubi është kuboid me brinjë të barabarta, d.m.th. $a = b = c$. Në këtë rast kemi $abc = a^3$.

Prandaj:

Për vëllimin e kubit vlen $V = a^3$, ku a është gjatësia e brinjës së tij.

• Hapi i ardhshëm është që formula $V = abc$ të shënohet në formën $V = BH$.

Pyetja: Kuboidi është prizëm dhe si i tillë ka dy baza dhe lartësinë. Cila është baza dhe cila është lartësia e kuboidit të paraqitur në figurë?

Përgjigjja: Baza e kuboidit është drejtkëndëshi, brinjët e të cilit kanë gjatësitë *a* dhe *b*, kurse lartësia e kuboidit është *c*.

Arsimtari: Shënoni me *B* sipërfaqen e bazës, kurse me *H* lartësinë e kuboidit. Shkruani se me çfarë është e barabartë *B* dhe me çfarë *H*.

• Nxënësi në tabelë shënon $B = ab, H = c$.

Arsimtari: Shënoni formulën $V = abc$, ashtu që në anën e djathtë, në vend të madhësive *a, b* dhe *c* të jenë madhësitë *B* dhe *H*.

• Nxënësi në tabelë shënon $V = BH$. Nxirret përfundimi:

Vëllimi i kuboidit është i barabartë me prodhimin e bazës dhe lartësisë së kuboidit:

$$V = BH.$$

▲ Përvetësimi i formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit trekëndor

Arsimtari: Në figurën 2.2 (Teksti, faqe 132) është paraqitur prizmi *P*, bazat e të cilit janë trekëndëshat *ABC* dhe $A_1B_1C_1$ dhe lartësia *H*. Dëshirojmë të vërtetojmë se vëllimi i prizmit *P* është V(*P*) = *BH,* ku *B* është sipërfaqja e bazës (d.m.th. sipërfaqja e trekëndëshit *ABC*). Tani dimë të njehsojmë vetëm vëllimin e kuboidit. Prandaj prizmin *P* do ta plotësojmë deri te kuboidi K dhe do të përdorim njohuritë mbi vëllimin e kuboidit.

Si të plotësojmë prizmin *P* deri te kuboidi *K*?

Në fillim plotësojmë trekëndëshin *ABC* deri te drejtkëndëshi *ABDE* (figura 2.3), pastaj plotësojmë drejtkëndëshin *ABDE* deri te kuboidi *K*, lartësia e të cilit është e barabartë me lartësinë e prizmit *P* (figura 2.4).

Ndarjes së drejtkëndëshit *ABDE* në dy çifte trekëndëshash kongruentë të shënuar me 1 dhe 2 (figura 2.3) i përgjigjet ndarja e kuboidit *K* në dy çifte prizmash kongruentë të shënuar me I dhe II (figura 2.4). Vini re se trekëndëshat në figurën 2.3. të shënuar me shifra të njëjta kanë sipërfaqe të barabarta. Sa herë është sipërfaqja e drejtkëndëshit *ABDE* më e madhe se sipërfaqja e trekëndëshit *ABC*?

Përgjigjja: Sipërfaqja e drejtkëndëshit *ABDE* është dy herë më e madhe se sipërfaqja e trekëndëshit *ABC*.

Arsimtari: Pra, kemi:

$$S(\square ABDE) = 2S\ (\triangle ABC).$$

Pyetja: Vini re se prizmat në figurën 2.3 të shënuara me shifra të njëjta romake kanë vëllime të barabarta. Sa herë është vëllimi i kuboidit *K* më i madh se vëllimi i prizmit *P*?

Përgjigjja: Vëllimi i kuboidit *K* është dy herë më i madh sesa vëllimi i prizmit *P*.

Arsimtari: Të shënojmë: $2V(P) = VK$

Pyetja: Me çfarë është i barabartë vëllimi i kuboidit *K*?

Përgjigjja: Vëllimi i kuboidit *K* është i barabartë me prodhimin e sipërfaqes së drejtkëndëshit *ABDE* dhe gjatësisë *H*:

$$V(K) = S\ (ABDE)H.$$

Arsimtari: Formulën e fundit do ta shënoni ashtu që madhësinë $S\ (ABDE)$ do ta zëvendësoni me madhësinë e barabartë me të $2S\ (\triangle ABC)$, kurse madhësinë *V(K)* me madhësinë e barabartë me të *2 V(P)*.

• Nxënësit shënojnë

$$\cancel{2}V(P) = \cancel{2}S(\triangle ABC)H.$$

Arsimtari: Nga barazimi i sipërm rrjedh se $V(P) = S(\triangle ABC)H$, çfarë duhej të vërtetonim.

Vëllimi i prizmit trekëndor është i barabartë me prodhimin e sipërfaqes së bazës dhe gjatësisë së lartësisë.

▲ Përvetësimi i formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit të çfarëdoshëm

• Nxënësit duhet të rikujtohen se diagonalet e tërhequra nga një kulm i *n*-këndëshit e ndajnë atë në *n*-2 trekëndësha dhe të theksohet se një ndarje e tillë e shumëkëndëshit të bazës i përgjigjet ndarja e prizmit në *n* - 2 prizma trekëndorë (figura 2.7, Teksti, faqe 133).

Arsimtari: Në figurën 2.7. është paraqitur ndarja e prizmit pesëkëndor *P* në tri prizma trekëndorë që janë shënuar me P_1, P_2 dhe P_3. Shohim se vëllimi i prizmit *P* është i barabartë me shumën e vëllimeve të prizmave P_1, P_2 dhe P_3:

$$V(P) = V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) \qquad (1)$$

Sipërfaqja e bazës së prizmit *P* është e barabartë me shumën e sipërfaqeve të bazave të prizmave P_1, P_2 dhe P_3

$$B = S(\triangle ABC) + S(\triangle ACD) + S(\triangle ADE) \qquad (2)$$

Pyetja: Me çfarë është i barabartë vëllimi i prizmit trekëndor?

Përgjigjja: Vëllimi i prizmit trekëndor është i barabartë me prodhimin e sipërfaqes së trekëndëshit të bazës dhe lartësisë së atij prizmi.

Arsimtari: Zbatoni atë rregull dhe shënoni se me çfarë janë të barabarta vëllimet e prizmave trekëndorë P_1, P_2 dhe P_3.

• Nxënësi shënon në tabelë:

$$V(P_1) = S(\triangle ABC)H,\ \ V(P_2) = S(\triangle ACD)H,\ V(P_3) = S(\triangle ADE)H$$

Arsimtari: Ne na intereson shuma e vëllimeve e të prizmave P_1, P_2 dhe P_3, sepse ajo është e barabartë me vëllimin e prizmit *P*. Shënoni atë shumë.

• Nxënësi në tabelë shënon:

$$V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) = S(\triangle ABC)H + S(\triangle ACD)H + S(\triangle ADE)H\ ,$$

$$V(P_1) + V(P_2) + V(P_3) = (S(\triangle ABC) + S(\triangle ACD) + S(\triangle ADE))H\ .$$

Arsimtari: Në qoftë se në formulën e fundit, në vend të madhësisë $V(P_1) + V(P_2) + V(P_3)$ vendosim madhësinë e barabartë me të $V(P)$ (shiko formulën (1)), kurse në vend të madhësisë $S(\triangle ABC) + S(\triangle ABC) + S(\triangle ABC)$, madhësinë e barabartë me të B (shiko formulën (2)), përftojmë:

$$V(P) = BH.$$

Vëllimi i prizmit është i barabartë me prodhimin e sipërfaqes së bazës dhe gjatësisë së lartësisë:

$$V = BH.$$

▲ Përvetësimi i formulës për njehsimin e vëllimit të prizmit trekëndor, katërkëndor dhe gjashtëkëndor

Nxënësit plotësojnë tabelën:

	Sipërfaqja e bazës së prizmit të rregullt.	Vëllimi i prizmit $V = BH.$
Prizmi i rregullt trekëndor	$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}H$
Prizmi i rregullt katërkëndor	$B = a^2$	$V = a^2H$
Prizmi i rregullt gjashtëkëndor	$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$	$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}H$

3. VËLLIMI I PIRAMIDËS

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

- në bazë të eksperimentit me rërë ose me ujë, përvetëson se dy prizma, bazat e të cilëve janë kongruente dhe lartësitë e barabarta kanë vëllimet e barabarta;
- di të sqarojë se cila piramidë, faqet anësore të së cilës janë trekëndësha kënddrejtë, mund të plotësohet me dy piramida të tjera deri te prizmi trekëndor i drejtë, ashtu që të tri piramidat që formojnë atë prizëm kanë vëllime të barabarta;

- në bazë të shqyrtimeve paraprake dhe njohurive të arritura më herët mbi vëllimin e prizmit përvetëson se për vëllimin e piramidës trekëndore, brinjët anësore të së cilës janë trekëndësha kënddrejtë vlen $V = \frac{1}{3}BH$;
- di të sqarojë se si duke ndarë piramidën trekëndore (katërkëndore, pesëkëndore) në tri (katër, pesë) piramida trekëndore arrihet deri te formula për njehsimin e vëllimeve të piramidave të tilla;
- në bazë të shqyrtimeve paraprake përvetëson përfundimin e përgjithshëm se për vëllimin e çdo piramide vlen $V = \frac{1}{3}BH$;
- duke përdorur formulën $V = \frac{1}{3}BH$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshat dhe katërkëndëshat zgjidh me sukses vëllimet e piramidave konkrete trekëndore dhe katërkëndore;
- duke përdorur formulën $V = \frac{1}{3}BH$ dhe njohuritë e arritura më herët mbi trekëndëshin barabrinjës, katrorin dhe gjashtëkëndëshin e rregullt, përcakton formulën për njehsimin e vëllimeve të piramidave të rregullta trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore;
- në bazë të elementeve të dhëna i njehson me sukses vëllimet e piramidave të rregullta trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Si edhe në rastin e mëparshëm, përmbajtjen e kësaj teme e përbëjnë tri teorema:

- Në qoftë se dy piramida trekëndore kanë bazat kongruente dhe lartësitë e barabarta, atëherë ato piramida kanë vëllime të barabarta.
- Për vëllimin e piramidës trekëndore vlen $V = \frac{1}{3}BH$.
- Për vëllimin e secilës piramidë vlen $V = \frac{1}{3}BH$.

Teorema e parë nuk vërtetohet. Këtë teoremë nxënësit duhet ta përvetësojnë në bazë të eksperimentit të derdhjes së ujit ose rërës prej njërës piramidë në piramidën tjetër.

Eksperimenti i dytë, gjithashtu i përshkruar në Tekst, tregon se si piramida trekëndore mund të plotësohet me dy piramida të tjera deri te piramida e drejtë, ashtu që tri piramidat që formojnë atë prizëm kanë vëllime të barabarta. Ky eksperiment është bazament për përvetësimin e teoremës së dytë.

Teorema e tretë vërtetohet duke e ndarë piramidën e çfarëdoshme në një numër të fundmë piramidash trekëndore.

Të shqyrtojmë se si mund të përpunohet kjo teoremë.

▲ Përvetësimi i formulës për njehsimin e piramidës së çfarëdoshme.

$$V = \frac{1}{3}BH.$$

FLETA MËSIMORE NR. 1

1. $V(P)=V(P_1)+\square+\square+\square,$

2. $B=B_1+\square+\square+\square,$

3. $V(P_1)=\frac{1}{3}B_1H,\ V(P_2)=\frac{1}{3}\square,\ V(P_3)=\frac{1}{3}\square,\ V(P_4)=\frac{1}{3}\square,$

4. $V(P)=\frac{1}{3}B_1H+\frac{1}{3}\square+\frac{1}{3}\square+\frac{1}{3}\square=$

$\frac{1}{3}(B_1+\square+\square+\square)H=\frac{1}{3}\square H.$

Pyetje: Në figurën 3.1. (Teksti, faqe 138) është paraqitur piramida P, rrëza e lartësisë të së cilës i takon brendësisë së bazës së asaj piramide. Piramida P është ndarë në katër piramida P_1, P_2, P_3 dhe P_4 bazat e të cilave në figurë janë ngjyrosur me ngjyra të ndryshme.

Cili është raporti ndërmjet vëllimit të piramidës P dhe vëllimeve të piramidave P_1, P_2, P_3 dhe P_4?

Përgjigjja: Vëllimi i piramidës P është i barabartë me shumën e vëllimeve të piramidave P_1, P_2, P_3 dhe P_4.

Pyetja: Plotësoni fushat e zbrazëta në rendin e parë të fletës suaj.

• Nxënësit shënojnë

$V(P)=V(P_1)+V(P_2)+V(P_3)+V(P_4).$

Pyetja: Të shënojmë me B_1, B_2, B_3 dhe B_4 sipërfaqet e piramidave P_1, P_2, P_3 dhe P_4, kurse me B sipërfaqen e bazës së piramidës P. Cili është raporti ndërmjet sipërfaqes së bazës së piramidës P dhe sipërfaqes së bazave të piramidave P_1, P_2, P_3 dhe P_4.

Përgjigjja: Sipërfaqja e bazës së piramidës P është e barabartë me shumën e sipërfaqeve të bazave të piramidave P_1, P_2, P_3 dhe P_4.

Arsimtari: Plotësoni fushat e zbrazëta në rendin e dytë të fletës mësimore.

• Nxënësit shënojnë

$$B=B_1+B_2+B_3+B_4.$$

Pyetja: Me çfarë është i barabartë vëllimi i piramidës trekëndore?

Përgjigjja: Vëllimi i piramidës trekëndore është i barabartë me një të tretën e prodhimit të sipërfaqes së bazës dhe gjatësisë së lartësisë së saj.

Arsimtari: Plotësoni fushat e zbrazëta në rendin e tretë të fletës suaj.

• Nxënësit shënojnë

$$V(P_1)=\frac{1}{3}B_1H,\ V(P_2)=\frac{1}{3}B_2H,\ V(P_3)=\frac{1}{3}B_3H,\ V(P_4)=\frac{1}{3}B_4H.$$

Arsimtari: Fushat e zbrazëta në rendin e ardhshëm të fletës suaj plotësojini ashtu që vlerat e përftuara për $V(P_1)$, $V(P_2)$, $V(P_3)$ dhe $V(P_4)$ do t'i zëvendësoni në formulën të cilën e keni përftuar në rendin e parë të fletës suaj. Merrni parasysh faktin se $B=B_1+B_2+B_3+B_4$.

• Nxënësit shënojnë

$$V(P)=\frac{1}{3}B_1H+\frac{1}{3}B_2H+\frac{1}{3}B_3H+\frac{1}{3}B_4H=$$
$$=\frac{1}{3}(B_1+B_2+B_3+B_4)H=\frac{1}{3}BH$$

dhe nxjerrin përfundimin:

Vëllimi i piramidës është i barabartë me një të tretën e prodhimit të sipërfaqes së bazës dhe gjatësisë së lartësisë së piramidës.

▲ Përvetësimi i formulës për njehsimin e vëllimit të piramidës së rregullt trekëndore, katërkëndore dhe gjashtëkëndore

Nxënësit plotësojnë tabelën:

	Sipërfaqja e bazës së piramidës së rregullt	Vëllimi i piramidës $V = \frac{1}{3}BH.$
Piramida e rregullt trekëndore		
Piramida e rregullt katërkëndore		
Piramida e rregullt gjashtëkëndore		

1. CILINDRI

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson përkufizimin e përgjithshëm të cilindrit;
- përvetëson nocionet: baza, mbështjellësi, boshtet dhe segmentet gjeneruese të cilindrit;
- përvetëson nocionin e gjatësisë së cilindrit;
- di se çfarë e karakterizon cilindrin e drejtë;
- përvetëson cilindrin e drejtë si trup i përftuar duke rrotulluar drejtkëndëshin përreth njërës prej brinjëve të tij.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Siç është theksuar më herët, përvetësimit të nocioneve të përmendura në qëllimet operative i kontribuojnë zgjidhjet e detyrave në të cilat përkufizohen këto nocione, vizatimi i figurave, shënimi dhe emërtimi i elementeve të cilindrit të paraqitur në figurë. Kështu janë koncipuar pyetjet kontrolluese (Teksti, faqe 145), prandaj propozojmë që t'i përpunoni me kujdes. Përvetësimit të nocionit të cilindrit si trup rrotullues i kontribuon detyra 1.1 (Përmbledhje, faqe 69). Nocioni i hapjes së cilindrit shqyrtohet në detyrat 1.2. dhe 1.3. Në detyrën 1.4. futet në përdorim nocioni i prerjes boshtore të cilindrit. Detyrat numerike 1.5. -1.9. janë kushtuar prerjes boshtore të cilindrit dhe në to përsëriten njohuritë mbi perimetrin dhe sipërfaqen e rrethit, sipërfaqen e drejtkëndëshit, diagonalen e drejtkëndëshit e kështu me radhë.

2. SIPËRFAQJA DHE VËLLIMI I CILINDRIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson dhe zbaton formulën për njehsimin e sipërfaqes së cilindrit;
- përvetëson dhe zbaton formulën për njehsimin e vëllimit të cilindrit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Formula për njehsimin e sipërfaqes së cilindrit përcaktohet lehtë në bazë të figurave 1.5. dhe 2.1. (Teksti, faqe 145).

Arsimtari: Sipas modelit të figurës 1.5. c) vizatoni hapjen e cilindrit dhe përmendni figurat që e përbëjnë atë.

Përgjigja: hapjen e cilindrit e formojnë dy rrathë kongruentë (bazat e cilindrit) dhe drejtkëndëshi (mbështjellësi i cilindrit).

Arsimtari: Shënoni sipërfaqen e bazës së cilindrit me B, kurse lartësinë e tij me H dhe, si në rastin e prizmit, përcaktoni formulën për njehsimin e sipërfaqes së cilindrit.

- Nxënësit përcaktojnë formulën $S = 2B+M$

Pyetja: Tani me r shënoni rrezen e rrethit dhe shikoni me kujdes figurën 1.5. c). Një brinjë e drejtkëndëshit (mbështjellësit të cilindrit) është e barabartë me lartësinë H. Me çfarë është e barabartë gjatësia e brinjës së dytë të drejtkëndëshit?

Përgjigjja: Gjatësia e brinjës së dytë të drejtkëndëshit është e barabartë me perimetrin e rrethit. Me fjalë të tjera, gjatësia e brinjës së dytë të drejtkëndëshit është e barabartë me $2r\pi$.

Arsimtari: Duke zbatuar formulat e njohura, njehsoni sipërfaqen e bazës (B) dhe sipërfaqen e mbështjellësit (*M*).

• Nxënësit përcaktojnë formulat $B = r^2\pi$ dhe $M = 2r\pi H$.

Arsimtari: Të zëvendësohen vlerat $B = r^2\pi$ dhe $M = 2r\pi H$ në formulën $S = 2B + M$ dhe do të përftohet formula për njehsimin e sipërfaqes së cilindrit në të cilin figurojnë rrezja *r* dhe lartësia H.

• Nxënësit përcaktojnë formulën:

$$S = 2r^2\pi + 2r\pi H,$$
$$S = 2r\pi(r + H).$$

Formula për njehsimin e vëllimit të cilindrit është vërtetuar në detaje në Tekst dhe këtë arsimtari duhet ta bëjë vetë.

3. KONI

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:

• përvetëson përkufizimin përshkrues të konit;
• përvetëson nocionet: baza, mbështjellësi, boshti, maja, lartësia dhe segmentet gjeneruese të konit;
• di se çfarë e karakterizon konin e drejtë;
• përvetëson konin e drejtë si trup të përftuar duke rrotulluar trekëndëshin kënddrejtë përreth njërit prej kateteve të tij;
• përvetëson teoremën sipas të cilës segmentet gjeneruese të konit të drejtë janë të barabarta;
• përvetëson formulën $s^2 = H^2 + r^2$, ku *s* është gjatësia e segmentit gjenerues, *H* lartësia dhe *r* rrezja e bazës së konit;
• duke zbatuar formulën $s^2 = H^2 + r^2$ njehson njërën prej tri madhësive *s*, H dhe *r* kur janë të njohura dy prej tyre.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Përvetësimit të nocionit të konit i kontribuojnë pyetjet e kontrollit (Teksti, faqe 153) dhe ato pyetje duhet të përpunohen. Mbi konin si trup rrotullues bën fjalë detyra 3.1. (Përmbledhja, faqe 72). Hapjes së konit i janë kushtuar detyrat 3.2. dhe 3.3.

Krahas nocionit të konit, përmbajtjen e këtij titulli e përbëjnë edhe dy teorema:

1. Segmentet gjeneruese të konit të drejtë janë të barabarta.

2. Le të jenë *s* dhe *H* gjatësitë e segmentit gjenerues dhe lartësisë së konit si dhe *r* rrezja e bazës së tij. Në qoftë se janë të njohura dy nga tri madhësitë *s*, H dhe *r*, atëherë madhësia e tretë mund të njehsohet duke zbatuar njërën prej formulave:

$$s = \sqrt{H^2 + r^2},\ H = \sqrt{s^2 - r^2},\ r = \sqrt{s^2 - H^2}.$$

Teorema 2 shpeshherë përdoret gjatë njehsimit të sipërfaqes dhe vëllimit të konit dhe në përmbledhje i janë kushtuar detyrat 3.3.-3.5. (Përmbledhja, faqe 72). Ju propozojmë që të përpunoni disa nga ato detyra.

Detyrat numerike 3.6. -3.10. i janë kushtuar prerjes boshtore të konit.

4. SIPËRFAQJA DHE VËLLIMI I KONIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson dhe zbaton formulën për njehsimin e sipërfaqes së konit;
- përvetëson dhe zbaton formulën për njehsimin e vëllimit të konit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Formula për njehsimin e sipërfaqes së konit përcaktohet lehtë në bazë të figurave 3.4 dhe 4.1 (Teksti, faqe 153).

Arsimtari: Sipas modelit të figurës 3.5 c) vizatoni hapjen e konit dhe përmendni figurat që e formojnë atë.

Përgjigjja: Hapjen e konit e formojnë rrethi (baza e konit) dhe sektori rrethor (mbështjellësi i konit).

Arsimtari: Shënoni me *B* sipërfaqen e bazës, kurse me *M* sipërfaqen e mbështjellësit të konit dhe, si në rastin e piramidës, përcaktoni formulën për njehsimin e sipërfaqes së tij.

- Nxënësit përcaktojnë formulën $S = B + M$.

Arsimtari: Në hapjen e konit me *r* shënoni rrezen e bazës dhe shkruani formulën për njehsimin e sipërfaqes së bazës së konit:

- Nxënësit shënojnë formulën $B = r^2\pi$.

Arsimtari: Shënoni sipërfaqen e mbështjellësit të konit si sipërfaqe të sektorit rrethor, të cilit i përgjigjen rrezja r_{se} dhe harku rrethor me gjatësi *l*

- Nxënësit me ndihmën e arsimtarit shënojnë formulën $M = \frac{r_{se}l}{2}$.

Arsimtari: Shënoni me *s* gjatësinë e segmentit gjenerues të konit. Shikoni me kujdes figurën 3.5 c) dhe shënoni me çfarë janë të barabarta rrezja dhe gjatësia e harkut të sektorit rrethor që paraqet mbështjellësin e konit.

- Nxënësit me ndihmën e arsimtarit shënojnë $r_{se}=s, l=2r\pi$.

Arsimtari: Të zëvendësohen vlerat $r_l = s, l = 2r\pi$ në formulën $M = \frac{r_{se}l}{2}$. dhe të shënohet formula për njehsimin e mbështjellësit të konit.

- Nxënësit përcaktojnë formulën:

$$M = \frac{r_{se}l}{2} = \frac{s(\cancel{2}r\pi)}{\cancel{2}},$$
$$M = rs\pi.$$

Arsimtari: Të zëvendësohen vlerat $B = r^2\pi$ dhe $M = rs\pi$ në formulën $S=B+M$ dhe do të përftohet formula për njehsimin e sipërfaqes së konit në të cilin figurojnë rrezja *r* dhe segmenti gjenerues *s*.

- Nxënësit përcaktojnë formulën:

$$S = r^2\pi + r\pi s,$$
$$S = r\pi(r + s).$$

Formula për njehsimin e vëllimit të konit është vërtetuar në detaje në Tekst (faqe 155 dhe 156).

5. TOPI. SIPËRFAQJA DHE VËLLIMI I TOPIT

QËLLIMET OPERATIVE

Nxënësi/ja:
- përvetëson nocionin e sferës dhe të topit;
- përvetëson nocionet e pikës së jashtme dhe pikës së brendshme;
- përvetëson nocionin e rrafshit të tangjenteve;
- përvetëson nocionin e rrafshit prerës, vijës rrethore prerëse dhe rrethit prerës;
- përvetëson nocionet e vijës rrethore të madhe dhe rrethit të madh;
- zgjidh detyrat e thjeshta mbi raportin e sferës dhe të rrafshit prerës të saj;
- përvetëson formulën për njehsimin e sipërfaqes së topit;
- përvetëson formulën për njehsimin e vëllimit të topit.

UDHËZIME DIDAKTIKE

Përvetësimit të nocionit të topit i kontribuojnë pyetjet kontrolluese në tekst, faqe 161. Si edhe në rastet e mëparshme, ju propozojmë që t'i përpunoni ato pyetje.

Ndër vetitë e përgjithshme, në Tekst shqyrtohen pozitat e mundshme reciproke të rrafshit dhe sferës.

Sipërfaqen e prizmit, piramidës, cilindrit dhe konit i kemi përkufizuar si sipërfaqet e hapjeve të tyre. Një gjë e tillë nuk mund të realizohet për sferën, prandaj në këtë nivel mësimi nuk mund të përkufizohet sipërfaqja e saj. Andaj në Tekst japim vetëm formulën për njehsimin e sipërfaqes së sferës dhe disa shembuj ilustrues, duke mos parashtruar gjatë kësaj pyetjen, çfarë është "sipërfaqja e sferës". Do të ishte mirë sikur arsimtari do të kishte modelin e topit dhe të konit, të tilla që rrezja e bazës së konit të jetë e barabartë me diametrin e topit dhe që lartësia e konit të jetë e barabartë me rrezen e topit (modelet e tilla mund të ndërtohen nga metali në çdo punishtë që ka tornoja). Kështu nxënësit me anë të matjes do të mund të konstatojnë se ata trupa kanë masa të barabarta, prej nga do të nxjerrin përfundimin se fjala është mbi trupat që kanë vëllime të barabarta. Atëherë, duke zbatuar formulën për vëllimin e konit, do të mund të përcaktojnë formulën për njehsimin e vëllimit të topit.

$$V(\text{topi}) = V(\text{koni})\ \frac{1}{3}(2r)^2\pi r = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

CIP - Каталогизација у публикацији
Централна народна библиотека Црне Горе, Цетиње

371 . 3 : 51 (035)

KERNIĆ, Izedin
Matematika : manuali për arsimtarët / Izedin Kërniq, Marko Jokiq, Mirjana Boshkoviq ; [përkthyes David Kalaj ; ilustrimi Sërgja Radulloviq] . - 1. izd. - Podgoricë : Enti i teksteve dhe i mjeteve mësimore, 2010 (Podgorica : Studio Mouse) . - 100 str. : ilustr. ; 29 cm

Tiraž 50.

ISBN 978-86-303-1439-1
1. Jokić, Marko [аутор] 2. Bošković, Mirjana [аутор] . - I. Kërniq, Izedin v. Kernić, Izedin
а) Математика - Настава - Методика - Приручници
COBISS.CG-ID 15599376